Priprave na MMO
Invariante in dvojno štetje

1 Invariante

Naloga 1.1. Na tabli so napisana števila od 1 do n. Ana v vsaki potezi izbriše dve izmed števil in na tablo napiše njuno vsoto. Katere so možne vrednosti števila, ki zadnje ostane na tabli?

Naloga 1.2. Na šahovski plošči je dovoljena poteza, da spremenimo barve vseh polj v kvadratu velikosti 2×2 iz bele na črno ali iz črne na belo. Ali nam lahko na koncu ostane le en črn kvadrat?

Naloga 1.3. Na kocki vsakemu oglišču priredimo neko število. Na začetku ima sedem oglišč število 0, eno oglišče pa število 1. V vsaki potezi izberemo dve števili, ki sta na sosednjih ogliščih, in vsako od njiju povečamo za 1. Ali so lahko vsa števila na kocki kdaj soda? Ali so lahko vsa števila kdaj deljiva z n za katerikoli $n > 1$?

Naloga 1.4. Na tabli imamo števila od 1 do 1000. Vsako število zamenjamo z vsoto njegovih števk in to ponavljamo, dokler ne dobimo enomestnega števila. Na koncu imamo na tabli torej 1000 enomestnih števil. Katero število je napisano največkrat?

Naloga 1.5. Torto razrežemo na n kosov, na vsakem kosu je ena jagoda. Slavljenec lahko pred začetkom praznovanja izvaja naslednji premik: izbere 2 jagodi (ne nujno iz istega kosa torte) in eno premakne za en kos v pozitivni smeri, drugo pa za en kos v negativni smeri. Za katere n lahko poskrbi, da bodo vse jagode na istem kosu?

Naloga 1.6. 3 žabe skačejo po koordinatni ravnini. V enem skoku lahko žaba skoči poljubno daleč v smeri, vzporedni premici skozi preostali dve žabi. Če žabe začnejo na poljih $(0, 0)$, $(0, 5)$ in $(3, 3)$, pokaži, da ne bodo nikoli dosegle polj $(1, 1)$, $(3, 1)$ in $(4, 8)$.

Naloga 1.7. Na samotnem otoku živi 45 kameleonov. V nekem trenutku jih je 13 modre, 15 rdeče in 17 zelene barve. Vsakič ko se srečata dva kameleona različne barve, se oba spremenita v tretjo barvo. Ali je mogoče, da bo naslednjič, ko obiščemo otok, tam natanko 15 kameleonov vsake barve? Ali je možno, da bodo vsi iste barve?

Naloga 1.8. Na celoštevilski mreži imamo gumijaste račke na poljih $(0, 0)$, $(0, 1)$ in $(1, 0)$. V vsaki potezi lahko račko umaknemo iz njenega polja in položimo 2 rački na polji desno in gor od tega polja, če sta bili prej prazni. Dokaži, da po končnem številu potez ni možno odstraniti rač z vseh treh začetnih polj.

Naloga 1.9. Dana je tabela velikosti $2n \times 2n$. V vsakem polju je napisana neka potenca števila 2 z nenegativnim celim eksponentom. Na začetku so vsa števila različna. V vsakem koraku izvedemo eno izmed naslednjih potez:

(a) Izberemo poljubni dve sosednji polji ter poljubno naravno število k in obema poljema prištejemo k.

(b) Zamenjamo števili v dveh poljih, ki sta simetrični čez središče tabele.

Ali je možno, da bo po končnem številu korakov v vseh poljih tabele zapisano isto število?

Naloga 1.10. Naj bo S končna množica vsaj dveh točk v ravnini. Denimo, da nobene tri točke iz S niso kolinearne. Z izrazom *mlin na veter* poimenujemo postopek, pri katerem na začetku izberemo premico l, ki gre skozi točko $P \in S$ in na kateri ne leži nobena druga točka iz S. Premica se vrti v smeri urinega kazalca okrog *središča vrtenja* P, vse dokler ne gre skozi še neko drugo točko iz S. Ta točka, ki jo označimo s Q, nato postane novo središče vrtenja in premica se sedaj vrti v smeri urinega kazalca okrog Q, vse dokler ne gre skozi še neko drugo točko iz S. Ta postopek se nikoli ne konča, središče vrtenja je vedno točka iz S. Pokaži, da lahko vedno izberemo točko P iz S in premico l, ki gre skozi P, tako da bo pri pripadajočem mlinu na veter vsaka točka iz S središče vrtenja neskončno mnogokrat.

2 Monovariante

Naloga 2.1. Na tabli je 50 števil med 1 in 100. V vsaki potezi lahko izberemo a in b, ki sta na tabli, ter ju zamenjamo z $\frac{a+b}{2}$ in $\sqrt{ab}$. Pokaži, da razlika med največjim in najmanjšim številom nikoli ne more biti večja od 99.

Naloga 2.2. V izolirani vasi velikosti $n \times n$ je na vsakem polju velikosti 1×1 ena hiša. Izkaže se, da se bo družina v neki hiši okužila natanko tedaj, ko sta bili okuženi vsaj dve sosednji družini (sosednji hiši imata skupno stranico). Predpostavimo, da so ljudje kužni v neskončnost. Najmanj koliko družin je bilo na začetku okuženih, če vemo, da je na koncu okužena cela vas?

Naloga 2.3. Na celoštevilski premici leži nekaj kamnov. Če se na istem mestu nahajata vsaj dva kamna, ju lahko premaknemo, enega na prejšnje mesto in enega na naslednje. Ali je mogoče, da se čez končno mnogo potez spet vrnemo v začetno stanje?

Naloga 2.4. n kart v vrsti položimo na mizo, nekaj obrnjenih navzgor, nekaj navzdol. V vsaki potezi lahko obrnemo k zaporednih kart, pri čemer je k dano število, če je najbolj leva karta, ki jo obračamo, pred potezo obrnjena navzgor. Dokaži, da kart ne moremo obračati v neskončnost.

Naloga 2.5. V ravnini je $2n$ točk, ki jih po 2 skupaj povežemo z daljicami. Ali jih je možno povezati na takšen način, da se nobeni dve daljici ne sekata?

Naloga 2.6. Na tabli je napisanih $n \geq 3$ naravnih števil. V enem koraku s table izberemo tri števila a, b, in c, ki so dolžine stranic neizrojenega neenakostraničnega trikotnika, in jih zamenjamo z $a+b-c$, $b+c-a$ in $c+a-b$. Dokaži, da ne obstaja neskončno zaporedje takih korakov.

Naloga 2.7. Naj bo n naravno število. V vrsti od leve proti desni v nekem vrstnem redu stoji n ovc in $n+1$ koz. *Čreda koz* je zaporedje vsaj dveh koz, ki si sledijo po vrsti, tako da takoj levo in takoj desno od zaporedja ni koze. V eni potezi opazujemo prvo čredo koz z leve. Če ima najbolj leva koza iz te črede na svoji levi ovco, ju zamenjamo. Če ima najbolj desna koza iz te črede na svoji desni ovco, ju zamenjamo. Dokaži, da bomo po končnem številu potez vedno prišli do postavitve, kjer si nobeni dve kozi ne bosta sosednji.

Naloga 2.8. Fizik je v svojem laboratoriju odkril nov delec, ki ga je poimenoval *imon*. Par imonov je lahko *povezan* in vsak imon je lahko povezan z poljubno mnogo drugimi imoni. Fizik je ugotovil, da lahko na imonih izvaja naslednji operaciji (eno naenkrat):

(a) Če je imon povezan z lihim številom drugih imonov v laboratoriju, ga lahko uniči.

(b) V vsakem trenutku lahko stanje podvoji tako, da za vsak imon I ustvari kopijo tega imona I'. Kopiji I' in J' sta povezani, če in samo če sta originalna imona I in J povezana. Dodatno je vsaka kopija I' povezana s svojim originalnim imonom I. Ostale povezave ostanejo takšne kot so bile pred podvojitvijo imonov.

Dokaži, da lahko fizik izvede takšno zaporedje operacij, da na koncu nobena dva imona nista povezana.

Naloga 2.9. Na naskončni celoštevilski mreži na vse točke (x, y), ki imajo $y \leq 0$ postavimo kovanec. Vsako potezo lahko s kovancem skočimo čez sosednji kovanec (vodoravno ali navpično) na naslednje polje, če je le to prazno. Pri tem odstanimo kovanec, ki smo ga preskočili. Ali je mogoče postaviti kovanec na točko $(0, 5)$ v končnem številu korakov?

3 Dvojno štetje

Naloga 3.1. Dokaži, da velja $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Naloga 3.2. Dokaži sledečo enakost: $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

Naloga 3.3. Poišči največje naravno število n, pri katerem lahko števila med 1 in 9 zapišemo na krožnico tako, da bo vsota poljubnih treh zaporednih števil najmanj n.

Naloga 3.4. Ali obstaja polieder, ki ima liho število ploskev, vsaka pa ima liho mnogo robov?

Naloga 3.5. Tabela velikost 6×6 je pokrita z 18 dominami. Pokaži, da obstaja premica, ki ne seka nobene izmed domin in deli tabelo na dva dela.

Naloga 3.6. V vasi živi 20 otrok. Vsaka dva imata skupnega vsaj enega dedka. Dokaži, da ima nek dedek vsaj 14 vnukov.

Naloga 3.7. Naj bo S množica n oseb, pri čemer velja:

- Vsaka oseba pozna natanko k drugih oseb.
- Vsaki 2 osebi, ki se poznata, imata natanko l skupnih znancev.
- Vsaki 2 osebi, ki se ne poznata, imata natanko m skupnih znancev.

Dokaži: $m(n-k) - k(k-l) + k - m = 0$.

Naloga 3.8. Športnega tekmovanja v različnih disciplinah se je udeležilo n dijakov. V vsaki disciplini je tekmovalo natanko k dijakov, kjer je $3 \leq k \leq n$. Vemo še, da sta vsaka dva dijaka tekmovala v natanko treh istih disciplinah, vsaki trije dijaki pa so tekmovali v natanko dveh istih disciplinah. Določi vse možne vrednosti števil n in k.

Naloga 3.9. Naj bo $p_n(k)$ število permutacij množice $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, ki imajo natanko k fiksnih točk. Dokaži, da velja

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!.$$

Opomba: Naravno število k je *fiksna točka permutacije* Π, če je $\Pi(k) = k$.

Naloga 3.10. Na šoli je 2024 deklet in 2024 fantov. Vsak dijak se lahko pridruži največ 100 šolskim dejavnostim. Znano je, da vsaka dva dijaka nasprotnega spola obiskujeta vsaj eno skupno dejavnost. Dokaži, da obstaja šolska dejavnost, ki jo obiskuje vsaj 11 deklet in 11 fantov.

Naloga 3.11. Z dvojnim štetjem dokaži mali Fermatov izrek:
Naj bo p praštevilo. Potem za vsako celo število a velja:

$$a^p \equiv a \pmod{p}.$$