

Priprave na MMO 2026 – 2. domača naloga

1. V zbirki 3^n gumijastih račč imamo $3^n - 1$ enako težkih račč in eno, ki tehta več kot ostale. V enem tehtanju na vsako stran ravnovesne tehtnice postavimo poljubno skupino račč in primerjamo njuni teži. Dokaži, da lahko v n tehtanjih ugotovimo, katera račka je težja od ostalih.
2. Na teniškem turnirju je nastopilo n igralcev. Vsak od njih je natanko enkrat igral z vsakim drugim igralcem in bodisi zmagal bodisi izgubil. Dokaži, da lahko igralce razporedimo v vrsto tako, da je vsak igralec premagal svojega desnega soseda.
3. V krogu sedi n deklet in n fantov. Izmed njih izberemo eno osebo, ki prva vstane, nato pa osebe po vrsti vstajajo v smeri urinega kazalca. Dokaži, da lahko vedno izberemo prvo osebo tako, da v vsakem trenutku stoji vsaj toliko fantov kot deklet.
4. Naj bo n naravno število. Jež se v $4n$ korakih premakne od točke $(0, 0)$ do točke $(2n, 2n)$ na koordinatni mreži, pri čemer se v vsakem koraku premakne za eno enoto navzgor ali v desno. Pot, ki jo jež opravi, razdeli kvadrat z oglišči $(0, 0)$, $(2n, 0)$, $(2n, 2n)$ in $(0, 2n)$ na dve območji. Pri tem je lahko eno izmed območij tudi prazno. Dokaži, da je število poti, ki razdelijo kvadrat na dve območji s sodo ploščino, enako

$$\frac{\binom{4n}{2n} + \binom{2n}{n}}{2}.$$

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **30. 11. 2025** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Zadeva elektronskega sporočila naj vsebuje niz »2. domača naloga«, nalogo pa oddajte v eni pdf datoteki.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani/a ime in priimek
samostojno in brez pomoči drugih oseb.

izjavljam, da sem vse naloge reševal/a

kraj in datum

Podpis: