

Priprave na MMO 2026 – 9. domača naloga

1. Šahovnica velikosti 8×8 je pobarvana na standarden način. V potezi lahko izberemo katerokoli vrstico, stolpec ali 2×2 podtabelo in v izbranem območju zamenjamo barvi (torej bela polja spremenimo v črna, črna pa v bela). Ali lahko pridemo v situacijo, ko imamo 63 belih polj in 1 črno polje?
2. Naj bodo x , k in n nenegativna cela števila. Dokaži, da velja

$$\sum_{k=0}^n \binom{x+k}{k} = \binom{x+n+1}{n}.$$

3. V vsaki celici tabele velikosti $m \times n$ je zapisano celo število. V enem koraku lahko spremenimo predznak vseh števil v poljubni vrstici ali poljubnem stolpcu. Dokaži, da lahko dosežemo, da je vsota vsake vrstice in vsakega stolpca nenegativna.
4. Naj bosta m in n pozitivni celi števili, večji od 1. V vsakem enotskem kvadratu mreže velikosti $m \times n$ leži kovanec, obrnjen s cifro navzgor. Poteza je sestavljena iz naslednjih korakov:
 - (a) izberemo kvadrat velikosti 2×2 v mreži;
 - (b) obrnemo kovanca v zgornjem levem in spodnjem desnem enotskem kvadratu;
 - (c) obrnemo kovanec bodisi v zgornjem desnem bodisi v spodnjem levem enotskem kvadratu.

Določi vse pare (m, n) , za katere je mogoče, da po končnem številu potez vsak kovanec kaže moža navzgor.

Naloge rešujte samostojno. Pisne rešitve je potrebno poslati najkasneje do **30. 5. 2026** preko e-maila na naslov **priprave.mmo@gmail.com**. Zadeva elektronskega sporočila naj vsebuje niz »9. domača naloga«, nalogo pa oddajte v eni pdf datoteki.

Rešitvam priložite tudi podpisano izjavo o samostojnem delu. Če boste pri reševanju nalog uporabili kakšno literaturo (v tiskani ali elektronski obliki), navedite reference.

Izjava o samostojnem delu

Spodaj podpisani/a

ime in priimek
samostojno in brez pomoči drugih oseb.

izjavljam, da sem vse naloge reševal/a

Podpis:

kraj in datum