

Konferenca slovenskih matematikov 2025

UP FAMNIT

12. in 13. september 2025

Konferenčni zbornik

Urednika: Martin Jesenko, Jasna Prezelj



Diamantni sponzor DMFA Slovenije



Kazalo

Luka Andrenšek: A complete classification of endomorphisms of Kiselman's semigroup	1
Rafael Andrist: Holomorphic symmetries of the Markov equation	1
Vladimir Batagelj: Slovenian mathematicians / analysis of bibliographic networks from OpenAlex	1
András Bátkai: From Passive Practice to Cognitive Activation: Fostering Deeper Mathematical Understanding	1
Jernej Činč: On chaotic planar attractors	2
Lovro Dretnik: Prvih 25 let tekmovanja dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike in zanimanje dijakov za tekmovanje	2
Andreja Eršte: Raziskovanje lastnosti nitnega nihala	3
Dejan Govc: Surfaces in the d-Cube	3
Domen Gradišek: Bézier diagonals	3
Izidor Hafner: Kalejdoskopi in dualnost poliedrov	3
Ahmad Hussein: Biholomorphic Invariants and Jet Determination/Parameterization in CR Geometry	4
Marjetka Knez: On Pythagorean-hodograph curves and their applications	4
Matija Kocbek: Explicit geometric construction of triangle-free Ramsey graphs	4
Maruša Lekše: Self separating properties of sets	10
Vida Manfreda Kolar: Prenova učnega načrta za matematiko: teoretična ozadja in didaktične usmeritve	10
Luka Marčič: Kako merimo prepletenost? / How to measure linking?	10
Matevž Mišičič: Lie algebra diameters	11
Bojan Mohar: The Four-Color Theorem and its generalizations	11
Laura Ogrin: Characterizations of minimally tough graphs in some graph classes	11
Dan Paraschiv: Infinitely connected Fatou components in a family of numerical methods	11

Aleksander Simonič: An explicit form of Ingham's zero density estimate	12
Aleš Toman: Izzivi poučevanja finančne matematike v angleščini	12
Beno Učakar: Carlemanova aproksimacija brez kritičnih točk / Carleman approximation without critical points	16
Russ Woodroffe: You can count with poset topology	20
Dejan Velušček: Applied Mathematics in Generic Pharma Development	20
Nejc Zajc: Predstavitev tabora MaRS in njegove zgodovine	21
Amalija Žakelj: Izzivi učenja in poučevanja matematike –včeraj, danes, jutri	21

A complete classification of endomorphisms of Kiselman's semi-group

Predavatelj: Luka Andrenšek, *Univerza v Ljubljani, Fakulteta za matematiko in fiziko*

Kiselman's semigroup K_n was introduced in the context of convexity theory and later studied in algebraic combinatorics. Kudryavtseva and Mazorchuk posed the open problem of classifying all endomorphisms of K_n , which remained unresolved. We present a complete description of the endomorphism monoid $\text{End}(K_n)$. We construct a Boolean matrix monoid $(D_n, \cdot)$, consisting of $n \times n$ matrices over $\{0, 1\}$ avoiding the 2×2 permutation matrix $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ as a submatrix, and show that $\text{End}(K_n) \cong (D_n, \cdot)$. The classification proceeds via an intermediate monoid $(M_n, *)$ of so-called monotone sequences of subsets of $\{1, \dots, n\}$, which captures the combinatorics of idempotents in K_n . These sequences are in bijection with Boolean matrices in D_n via characteristic vectors, preserving monoid structure. As corollaries, we recover the known result that $\text{Aut}(K_n)$ is trivial, and compute the cardinality of $\text{End}(K_n)$ for small n via existing results on pattern-avoiding matrices. This resolves an open problem and reveals a rich combinatorial structure underlying $\text{End}(K_n)$.

Holomorphic symmetries of the Markov equation

Predavatelj: Rafael Andrist, *University of Ljubljana*

The Diophantine solutions of the so-called *Markov equation* $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ were originally considered by Markov in 1879. The solutions (x, y, z) in the natural numbers are called *Markov triples*. Later, this equation was studied over the complex numbers in algebraic geometry: The group of algebraic symmetries is discrete and acts transitively on the Markov triples. Research about the Markov equation has remained a very active area in both number theory and geometry until now. We describe the group of holomorphic symmetries. In contrast to the algebraic case, this group is infinite-dimensional and interpolates any permutation of (ordered) Markov triples.

Slovenian mathematicians / analysis of bibliographic networks from OpenAlex

Predavatelj: Vladimir Batagelj, *IMFM, Ljubljana, UP FAMNIT, Koper, UL FMF, Ljubljana*

OpenAlex (<https://openalex.org/>) is a newer and freely available bibliographic database that covers a much larger number of publications than similar paid services such as Web of Science and Scopus. It also provides programmatic access (API) to the data.

From the OpenAlex data, we created bibliographic networks (citations, authorship, journals, keywords, countries, year of publication, etc.) for works with mathematical content and Slovenian co-authors. We will present some results of the analysis of these networks. More detailed results (and data) will be available at <https://github.com/bavla/OpenAlex/tree/main/ex/Simat>

From Passive Practice to Cognitive Activation: Fostering Deeper Mathematical Understanding

Predavatelj: András Bátkai, *PH Vorarlberg, Austria*

The goal of intelligent practice and cognitive activation in mathematics education is to move students beyond rote memorization and towards a genuine, deeper understanding of concepts. Modern educational theories, such as constructivism and constructionism, suggest that learning is most effective when students actively construct their own knowledge. Research shows that methods like "learning by explaining" can significantly enhance cognitive engagement, as they require learners to structure and articulate their understanding of complex topics.

This talk will first explore key findings from the educational literature on cognitive activation and self-determination theory, highlighting how student-centered approaches can foster motivation, self-confidence, and a more robust grasp of mathematical concepts. We will then present a case study from our recent research, which introduced

an innovative homework format for linear algebra students. Instead of traditional written submissions, our students were tasked with creating their own explainer videos to demonstrate their solutions.

The results of our mixed-methods study, featuring quantitative surveys and qualitative interviews, reveal that students found this video-based approach to be highly cognitively activating. The process not only improved their technical and media literacy skills but also positively impacted their self-perceived understanding and self-confidence in the subject. We will discuss the differences in perception between students and instructors regarding the benefits and challenges of this method, offering insights into its potential and areas for future optimization. We conclude by showing how this method can serve as a powerful tool to empower future educators and prepare them for the challenges of a digital world.

On chaotic planar attractors

Predavatelj: Jernej Činč, *University of Maribor & ICTP Trieste*

Soavtor: Piotr Oprocha, *University of Ostrava*

Dynamical systems theory provides a rigorous framework for studying complex phenomena arising in physics and engineering. A famous example is the Lorenz system, introduced in the 1960s as a simplified model of fluid convection derived from the Navier–Stokes equations. Its solutions, known as Lorenz attractors, became a paradigm of chaotic dynamics and inspired the notion of the “butterfly effect” —small changes in initial conditions can lead to drastically different long-term behavior. Since then, parameterized families of chaotic attractors have been one of the central topics in dynamical systems.

We are particularly interested in the study of planar attractors and the question: which attractors appear *typically* in certain systems and can they be discovered through physical experiments?

A surprising answer in a particular setting comes from the pseudo-arc. Together with the arc, it is the only planar continuum (that is, a compact connected metric space) in which every proper subcontinuum is homeomorphic to the whole continuum (Hoehn–Oversteegen, 2020). First described about a century ago, the pseudo-arc has remarkable structural properties and arises typically in several topological contexts. In this talk I will present a result which reveals that pseudo-arc is a generic object within natural families of attractors arising as extensions of dynamical systems on interval. This is joint work with Piotr Oprocha (University of Ostrava).

Prvih 25 let tekmovanja dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike in zanimanje dijakov za tekmovanje

Predavatelj: Lovro Dretnik, *Gimnazija Poljane*

Tekmovanja v znanju matematike imajo v Sloveniji dolgo tradicijo, saj je bilo prvo tekmovanje v znanju matematike izvedeno že leta 1950. Tekmovanje se je nenehno razvijalo in v letu 1985 doživelo korenite spremembe, saj je bilo v tem letu uvedeno šolsko tekmovanje tudi za učence, ki so obiskovali šole, kjer matematika ni bila tako poudarjena, ipd. Danes na tekmovanju sodelujejo učenci od 1. razreda osnovne šole, do 4. letnika srednje šole.

Ker se je v srednji šoli pojavila potreba po diferenciaciji tekmovanja zaradi različnih programov srednjega izobraževanja, je bilo v letu 2001 prvič izvedeno tekmovanje v znanju matematike v treh nivojih zahtevnosti. K že uveljavljenemu tekmovanju srednješolcev v znanju matematike za Vegova priznanja –kat A, je bilo uvedeno še tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike –kat B in tekmovanje dijakov srednjih poklicnih šol v znanju matematike –kat C.

V prispevku se bom osredotočil na tekmovanje dijakov srednjih tehniških in strokovnih šol v znanju matematike –kat B, katerega član sem že od leta 2008, od leta 2015 pa tudi njen predsednik. Povzel bom prvih 25 let obstoja tega tekmovanja, posegel z informacijami o zanimanju za tekmovanje in kako se je tekmovanje tekom let razvijalo, spreminjalo.

Raziskovanje lastnosti nitnega nihala

Predavateljica: Andreja Eršte, *Srednja šola Josipa Jurčiča Ivančna Gorica*

V prispevku je opisana raziskava, v kateri je 86 dijakov tretjih letnikov gimnazijskega programa pri pouku fizike spoznalo lastnosti nitnega nihala s pomočjo izkustvenega učenja. V uvodu so predstavljene vsebine, ki jih pri nihanju obravnavamo v srednji šoli, ter motivacija za izbiro izkustvenega učenja ter učenja z raziskovanjem pri obravnavanju nove učne snovi. Nato je predstavljena odprta laboratorijska vaja, pri kateri so dijaki v parih raziskovali lastnosti nitnega nihala. Na podlagi svojega predznanja in predstav o nihanju so si zastavili več hipotez, ter zasnovali poskuse s katerimi so svoje hipoteze potrdili ali ovrgli. Zanimivo je, da se več kot tri četrtine parov pri postavljanju prve hipoteze osredotoča na napovedovanje funkcijske odvisnosti med fizikalnimi količinami ter analizo podatkov z grafom. Sledila bo analiza dela dijakov, laboranta in profesorice fizike pri celotnem učnem procesu, s poudarkom na vpliv raziskovanja na razumevanje učne snovi. Dijaki so imeli na odprto laboratorijsko vajo pozitiven odziv, večina se je s tem tipom dela srečala prvič; v njihovi samoevalvaciji prevladuje mnenje, da znanje pridobljeno z raziskovalnim in izkustvenim učenjem obdržijo dlje časa in pojav bolje razumejo. Na podlagi pridobljenih podatkov in odzivov, so v zaključku opisane možne izboljšave za prihodnjo uporabo izkustvenega učenja pri pouku fizike.

Surfaces in the d -Cube

Predavatelj: Dejan Govc, *Faculty of Mathematics and Physics, University of Ljubljana*

Soavtorja: Andrea Aveni, *University of Copenhagen*; Erika Roldan Roa, *Max Planck Institute for Mathematics in the Sciences, Leipzig*

Triangulating a surface means finding a subcomplex of a simplex that is homeomorphic to the surface. Vertex-minimal triangulations of closed surfaces have been characterized in classical work of Jungerman and Ringel.

The corresponding problem for cubes has been much less studied. Notably, Coxeter found surfaces in the d -cube of maximal possible genus and Schulz gave bounds on the dimension of the cube required to realize a particular surface as a subcomplex. These latter bounds are tight for orientable surfaces and nonorientable surfaces of even demigenus $k \geq 12$, while for surfaces of odd demigenus they may be off by one.

In the cubical case, minimizing the embedding dimension is not equivalent to minimizing the number of vertices, and finding vertex-minimal cubical realizations of surfaces remains poorly understood. We provide new theoretical bounds for this problem and, using computational methods, give a complete enumeration of connected closed surfaces in the 5-cube. We find that there are 2690 isomorphism classes of such surfaces. As a consequence, we obtain the minimal f -vectors of these surfaces in the 5-cube and complete Schulz's characterization for the even demigenus case, while discovering some new examples in the process.

Bézier diagonals

Predavatelj: Domen Gradišek

The topic of the lecture is Bézier curves and surfaces. The main goal is to determine the diagonals on Bézier surfaces in the following sense: it will be shown that diagonals are Bézier curves, and the relationship between their control points and the control points of the surfaces will be established. Furthermore, conditions are derived under which two arbitrary curves are diagonals of a Bézier surface. Finally, a class of surfaces with identical diagonals is determined, and how this class changes when, in addition to conditions on the diagonals, further constraints on the boundary of the surface are imposed.

Kalejdskopi in dualnost poliedrov

Predavatelj: Izidor Hafner, *upokojenec*

Poliedrski kalejdskopi omogočajo predstavitev poliedra z izdelavo le manjšega dela poliedra. Oglišča dualnega poliedra dobimo tako, da na sredino ustreznega kalejdskopa vstavimo kroglico. Z vstavitvijo kroglic si lahko predstavljamo tudi molekule. Lahko si pomagamo tudi z risbo. Izdelava kalejdskopov je tudi zanimiv eksperiment za učence.

Biholomorphic Invariants and Jet Determination/Parameterization in CR Geometry

Predavatelj: Ahmad Hussein, *Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko*

A very brief motivation for a problem of interest in CR Geometry: the finite jet determination/parameterization of automorphisms of real, smooth, strongly pseudoconvex hypersurfaces in $\mathbb{C}^n$, approached via stationary disks. In as much as time allows, I will mention some methods I am currently exploring to further our understanding of this problem. Due to time constraints, the discussion will remain informal

On Pythagorean-hodograph curves and their applications

Predavateljica: Marjetka Knez, *University of Ljubljana, Faculty of Mathematics and Physics*

Polynomial Pythagorean-hodograph (PH) curves, characterized by the property that their unit tangent is rational, have many important features for practical applications. Planar PH curves are important since they admit rational offset curves, which are useful in computer-aided design and manufacturing. Spatial PH curves are especially interesting because their construction from a quaternion preimage curve allows one to equip the curve with a rational orthonormal adapted frame which makes these curves an efficient tool for motion design applications. Another key advantage of the polynomial PH curve is that its arc length function is also a polynomial. This property significantly simplifies the computation of PH curves with prescribed length and allows simple real-time interpolator algorithms, making PH curves useful in robotics as well. In the talk we give an overview of various PH construction algorithms and methods, supported by numerical examples that illustrate their efficiency, present some recent developments and future challenges.

Explicit geometric construction of triangle-free Ramsey graphs

Predavatelj: Matija Kocbek, *Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani*

Prispevek

Povzetek. We describe an explicit geometric construction of a vast parametrized family of graphs without k -cliques with bounded independence number generalizing triangle-free Ramsey graphs described by Codenotti, Pudlák and Resta and provide a new combinatorial proof for the upper bound on the independence number of the latter. We focus on triangle-free graphs and describe some families of such graphs with n vertices and independence number $O(n^{\frac{2}{3}})$ which give us a constructive asymptotic lower bound $\Omega(t^{\frac{2}{3}})$ for Ramsey numbers $R(3, t)$ which achieves the best known constructive lower bound. We describe an additional family of graphs that don't match the best known bound but still have a polynomial independence number with regards to the number of vertices and are based on Euclidean geometry. We determine a necessary condition for parameters for which this family of graphs could yield better constructive asymptotic lower bounds on $R(s, t)$ than those currently known, again focusing on $R(3, t)$. We also present a linear approximation algorithm for finding the largest independent set in this parametrized family of graphs which is a $\frac{1}{2}$ -approximation algorithm for a significant subfamily.

Opišemo eksplicitno geometrijsko konstrukcijo velike družine grafov brez k -klik z omejenim neodvisnostnim številom, ki posplošijo Ramseyeve grafe brez trikotnikov, ki so jih opisali Codenotti, Pudlák in Resta, ter podamo nov kombinatorični dokaz za zgornjo mejo neodvisnostnega števila slednjih. Osredotočimo se na grafe brez trikotnikov in predstavimo nekaj družin takšnih grafov na n vozliščih z neodvisnostnim številom reda $O(n^{\frac{2}{3}})$, ki nam dajo konstruktivno asimptotsko spodnjo mejo $\Omega(t^{\frac{2}{3}})$ za Ramseyeva števila $R(3, t)$, kar doseže najboljšo znano konstruktivno spodnjo mejo. Opišemo še dodatno družino grafov, ki nam ne dajo najboljših znanih mej, vendar imajo še vedno polinomsko neodvisnostno število glede na število vozlišč in so zasnovani na evklidski geometriji. Določimo tudi potreben pogoj na parametre, za katere bi lahko ta družina grafov porodila boljše konstruktivne asimptotske spodnje meje za $R(s, t)$, kot so trenutno znane, pri čemer se zopet osredotočimo na $R(3, t)$. Predstavimo tudi linearen aproksimacijski algoritem za iskanje največje neodvisne množice v tej parametrizirani družini grafov, ki je $\frac{1}{2}$ -aproksimacijski za njeno pomembno poddružino.

1. Uvod

Podgraf nekega grafa je klika, če sta poljubni dve vozlišči v tem podgrafu sosednji. Podgraf nekega grafa je neodvisna množica, če nobeni dve vozlišči v tem podgrafu nista sosednji. Ramseyev izrek [9] v posebnem primeru pravi:

Izrek 1. *Za vsaki naravni števili $s, t \geq 3$ obstaja naravno število n , da bo vsak graf z vsaj n vozlišči vseboval kliko velikosti s ali neodvisno množico velikosti t . Najmanjšemu takšnemu n pravimo Ramseyevo število $R(s, t)$.*

Natančno določanje Ramseyevih števil je izredno težka naloga, zato se dosti ukvarjamo z določanjem asimptotskega obnašanja teh števil. Edina Ramseyeva števila, katerih natančno asimptotiko poznamo, so števila $R(3, t)$. Leta 1980 so Ajtai, Komlós in Szemerédi [1] dokazali asimptotsko zgornjo mejo za Ramseyevo število $R(3, t)$, leta 1995 pa je Kim [7] nekonstruktivno pokazal, da je ta zgornja meja asimptotsko tesna:

Izrek 2. $R(3, t) = \Theta\left(\frac{t^2}{\log t}\right)$.

Veliko zanimanja pa je tudi za poskuse konstruktivnih dokazov spodnje asimptotske meje za $R(3, t)$. Do današnjega dne je najboljša konstruktivna spodnja meja podana z $R(3, t) = \Omega(t^{\frac{2}{3}})$. Prvi članek, ki je predstavil eksplicitno konstrukcijo družine grafov brez trikotnikov z n vozlišči in neodvisnostnim številom reda $O(n^{\frac{2}{3}})$ je bil [2]. Kasneje so novo konstrukcijo takšnih grafov predstavili v [5].

Kostochka, Pudlák in Rödl [8] so leta 2010 prvi predstavili posplošitev grafov iz [5]. Osredotočili so se na nekaj specifičnih grafov brez klik velikosti 4, 5 oz. 6, ki so jih definirali podobno kot grafe brez trikotnikov iz [5], in s pomočjo le-teh prišli do novih najboljših konstruktivnih spodnjih asimptotskih mej za $R(4, t)$, $R(5, t)$ in $R(6, t)$, ki še do danes niso bile izboljšane. Prav tako so prvi predstavili kombinatoričen dokaz za zgornjo mejo neodvisnostnega števila teh grafov, saj je v [5] bil predstavljen le algebrski dokaz.

V tem članku bomo predstavili drugačno posplošitev teh grafov in s pomočjo le-te tudi nov kombinatoričen dokaz zgornje meje za njihovo neodvisnostno število. Najprej bomo definirali incidenčno strukturo, ki posploši pojme t -terno uravnoteženih načrtov in pakiranj, ki do zdaj še ni bila opisana, kolikor nam je znano. Predstavili bomo neenakost, ki povezuje število točk, blokov in incidenčnih parov v tej strukturi. Na podlagi te incidenčne relacije bomo definirali veliko parametrizirano družino grafov brez k -klik in s pomočjo prej omenjene neenakosti določili potreben pogoj na parametre, za katere bi lahko dobili grafe, ki bi nam dali nove in boljše konstruktivne asimptotske spodnje meje za Ramseyeva števila $R(s, t)$ za poljuben $s, t \geq 3$, pri čemer se bomo osredotočili na $R(3, t)$. Prav tako bo ta družina grafov porodila dosti do zdaj še neopisanih primerov grafov brez trikotnikov z neodvisnostnim številom, ki ima polinomski red glede na število vozlišč. Nekaj jih bomo tudi eksplicitno navedli, med drugim tudi dve novi konstrukciji družin grafov brez trikotnikov na n vozliščih z neodvisnostnim številom reda $O(n^{\frac{2}{3}})$. Ena izmed teh dveh družin bo prva eksplicitna konstrukcija družine grafov brez trikotnikov na n vozliščih s takšnim neodvisnostnim številom, ki obstaja za poljuben n , saj sta tako [2] kot tudi [5] predstavila konstrukcije le za n posebne oblike. Vsi rezultati, ki so v tem članku povzeti iz literature, so kot takšni navedeni. Rezultati brez referenc so originalni.

2. Geometrijska konstrukcija grafov brez k -klik z omejenim neodvisnostnim številom

Definirajmo najprej centralni objekt, s katerim bomo delali.

Definicija 3. *Naj bodo $m, \lambda \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}$ množica, katere elemente imenujemo točke, in $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ množica podmnožic $\mathcal{A}$ (elementom $\mathcal{B}$ pravimo bloki), za katere velja:*

1. *Poljubnih m različnih točk je skupaj vsebovano v kvečjemu λ blokih.*
2. *Vsaka točka je vsebovana v vsaj enem bloku.*
3. *Vsak blok je neprazen.*

Potem pravimo, da je $\mathcal{B}$ šibko m -terno uravnotežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom λ .

Definicija 4. *Naj bo $x \in \mathcal{A}$ in $B \in \mathcal{B}$. Če je $x \in B$, pravimo, da je (x, B) incidenčni par.*

Definicija 5. *Naj bosta $m, \lambda \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{B}$ šibko m -terno uravnotežen načrt nad neko množico $\mathcal{A}$ s parametrom λ . Naj bo $<$ poljubna stroga linearna urejenost množice $\mathcal{A}$. Definiramo graf $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m, \lambda}$ tako, da za vozlišča vzamemo vse incidenčne pare in dve vozlišči (x, B_1) in (y, B_2) imata med seboj povezavo, če velja $x < y$, B_1 in B_2 sta različna ter $x \in B_2$.*

Opazimo, da notacija zanemara dejstvo, da je tako definirani graf odvisen tudi od množice $\mathcal{A}$ in linearne urejenosti $<$. Tako postopamo zaradi enostavnosti pisanja, vendar ohranimo to dejstvo v mislih. Raziščimo lastnosti teh grafov:

Trditev 6. *Naj bo $\mathcal{B}$ šibko m -terno uravnotežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom λ . Potem $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m, \lambda}$ ne vsebuje klike velikosti $m + \lambda$.*

Dokaz. Dokazujemo s protislovjem. Denimo, da imamo klico $(x_1, B_1), (x_2, B_2), \dots, (x_{m+\lambda}, B_{m+\lambda})$. Potem so vse točke paroma različne in vsi bloki paroma različni. Brez škode za splošnost denimo, da je $x_1 < x_2 < \dots < x_{m+\lambda}$. Potem po konstrukciji velja $x_1, \dots, x_m \in B_{m+i}$ za vse $i \in \{0, \dots, \lambda\}$. Ker je m različnih točk v $\mathcal{B}$ vsebovano v kvečjemu λ različnih blokov, je to protislovje, in zato $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}$ res ne vsebuje klike velikosti $m + \lambda$. $\square$

V tem članku standardno označimo velikost največje neodvisne množice v grafu G z $\alpha(G)$.

Trditev 7. *Naj bo $\mathcal{B}$ šibko m -terno uravnotežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom λ . Potem je $\alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}) \leq |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$.*

Dokaz. Naj bo $H \subseteq V(\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda})$ poljubna neodvisna množica vozlišč. Potem lahko H zapišemo kot disjunktno unijo dveh množic.

Prva množica H_1 vsebuje vse incidenčne pare iz H , za katere se točka pojavi v vsaj dveh različnih incidenčnih parih iz H . Vzemimo dva takšna incidenčna para, ki delita isto točko, recimo (x, B_1) in (x, B_2) . Ker je H neodvisna, za vsak $(y, B_2) \in H, y \neq x$, mora veljati $y < x$, saj bi drugače imeli povezavo med (x, B_1) in (y, B_2) , kar bi bilo v protislovju z neodvisnostjo H . Podobno za vsak $(y, B_1) \in H, y \neq x$, mora veljati $y < x$, saj bi sicer imeli povezavo med (x, B_2) in (y, B_1) . To pomeni, da je med vsemi točkami, ki se pojavijo v H v paru z B_1 , x maksimalna. Sledi, da je za vsak $(z, B) \in H_1, z$ maksimalen med vsemi točkami, ki se pojavijo v paru z B v H , torej se vsak blok B lahko pojavi v H_1 v paru s kvečjemu eno točko. Torej je $|H_1| \leq |\mathcal{B}|$.

Druga množica H_2 vsebuje vse incidenčne pare, za katere se točka pojavi v natanko enem paru iz H . Očitno je potem $|H_2| \leq |\mathcal{A}|$.

Ker je $H = H_1 \cup H_2$, velja $|H| \leq |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$ in zato $\alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}) \leq |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$. $\square$

Trditev 8. *Naj bo $\mathcal{B}$ šibko m -terno uravnotežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom λ . Potem je $|\mathcal{B}| \leq \alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda})$.*

Dokaz. Pokazali bomo, da vsak graf $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}$ vsebuje neodvisno množico velikosti $|\mathcal{B}|$. Pokazali bomo z indukcijo na $n = |\mathcal{B}|$.

Za $n = 0$ je trditev očitna in baza indukcije izpolnjena. Naj bo $n \geq 1$ in denimo, da je trditev resnična za vsa manjša naravna števila. Naj bo $\mathcal{B}$ moči n šibko m -terno uravnotežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom λ . Naj bo x najmanjša točka v $\mathcal{A}$ in naj bo $\mathcal{C}$ množica vseh blokov, ki vsebujejo x . Naj bo $\mathcal{I}_1$ množica vseh incidenčnih parov, ki vsebujejo x in bloke iz $\mathcal{C}$. Ta množica je očitno neodvisna, saj imajo vsi incidenčni pari v njej isto točko. Naj bo nadalje $\mathcal{D} = \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$. Potem po konstrukciji množice $\mathcal{C}$, x ni vsebovan v nobenem izmed blokov iz $\mathcal{D}$. Naj bosta $y \in \mathcal{A} \setminus \{x\}$ in $B_2 \in \mathcal{D}$ takšna, da je $y \in B_2$, in naj bo $(x, B_1) \in \mathcal{I}_1$. Zaradi minimalnosti x , sta incidenčna para (x, B_1) in (y, B_2) lahko sosednja samo, če je $x \in B_2$, kar je nemogoče, ker x ni vsebovan v nobenem bloku iz $\mathcal{D}$. Torej $\mathcal{I}_1$ ne deli povezave z nobenim incidenčnim parom s točko iz $\mathcal{A}$ in blokom iz $\mathcal{D}$ ter je drugačen od vsakega takšnega para. Naj bo $A' \subseteq \mathcal{A}$ množica točk iz $\mathcal{A}$, ki so vsebovane v kakšnem bloku iz $\mathcal{D}$. Tedaj je $\mathcal{D}$ šibko m -terno uravnotežen načrt nad A' s parametrom λ in $\Gamma_{\mathcal{D}}^{m,\lambda}$ je izomorfen podgrafu H grafa $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}$, ki je vpet na vozliščih s točkami iz A' in bloki iz $\mathcal{D}$. Dokazali smo že, da je ta podgraf neodvisen in disjunkten z $\mathcal{I}_1$. Ker je x vsebovan v vsaj enem bloku, je $\mathcal{C}$ neprazna množica in zato $|\mathcal{D}| < n$. Potem ima po indukcijski predpostavki $\Gamma_{\mathcal{D}}^{m,\lambda}$, in s tem tudi H , neodvisno množico $\mathcal{I}_2$ moči $|\mathcal{D}|$. Tedaj je $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ neodvisna množica v $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}$ moči $|\mathcal{C}| + |\mathcal{D}| = |\mathcal{B}|$, kar zaključuje dokaz. $\square$

Dokaz zgornje trditve nam da algoritem, s katerim lahko učinkovito najdemo neodvisno množico moči $|\mathcal{B}|$ v $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}$. Začnemo s prazno neodvisno množico. Vzamemo najmanjšo točko in dodamo v neodvisno množico vse incidenčne pare, v katerih ta točka nastopa. Iz množice vseh točk in blokov odstranimo to točko in vse bloke, ki jo vsebujejo. Ponovno vzamemo najmanjšo izmed preostalih točk in v neodvisno množico dodamo vse incidenčne pare, v katerih nastopa ta točka z neodstranjenimi bloki. Nadaljujemo ta postopek, dokler nam ne zmanjka blokov. Če primerno shranimo incidence, ima ta algoritem časovno zahtevnost $O(|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|)$.

Prejšnja trditev nam prav tako da naslednjo očitno posledico, ki nam v posebnem primeru pove, da je neodvisnostno število premo sorazmerno s številom točk in blokov, če imamo več blokov kot točk.

Posledica 9. *Naj bo $\mathcal{B}$ šibko m -terno uravnotežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom λ . Denimo, da je $|\mathcal{A}|^\varepsilon \leq k|\mathcal{B}|$ za nek $k > 0$ in nek $0 < \varepsilon \leq 1$. Potem velja $\frac{|\mathcal{A}|^\varepsilon + |\mathcal{B}|}{k+1} \leq \alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda})$.*

Za veliko pomembnih razredov šibko m -terno uravnoteženih načrtov je znano, da je $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$, kot na primer za t -načrte ali parno uravnotežene načrte pri določenih pogojih, ki zagotavljajo netrivialnost.

Šibko m -terno uravnotežen načrt $\mathcal{B}$ nad $\mathcal{A}$ s parametrom λ je m -načrt s parametri (v, k, λ) , če je $|\mathcal{A}| = v$, če vsak blok vsebuje natanko k točk in če je poljubnih m paroma različnih točk vsebovano skupaj v natanko λ blokov. Fisherjeva neenakost [6] nam pove, da za takšen m -načrt $\mathcal{B}$, ob dodatnem pogoju, da je $k < v$, velja $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$. To nam pove naslednje:

Posledica 10. *Naj bo $\mathcal{B}$ m -načrt s parametri (v, k, λ) nad $\mathcal{A}$ in naj bo $k < v$. Potem je $\frac{|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|}{2} \leq \alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}) \leq |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$.*

Podobno pravimo za šibko 2-terno uravnovežen načrt $\mathcal{B}$ s parametrom λ , da je parno uravnovežen načrt s parametrom λ , če vsak blok vsebuje vsaj dve točki in če sta poljubni dve točki skupaj vsebovani v natanko λ blokov. Erdős-de Bruijnov izrek [4] nam pove, da za $\mathcal{B}$, ki je parno uravnovežen načrt s parametrom $\lambda = 1$ in v katerem noben blok ne vsebuje celega $\mathcal{A}$, velja $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$. Velja pa tudi njegova posplošitev za poljuben λ [10]. Od tod sledi:

Posledica 11. *Naj bo $\mathcal{B}$ parno uravnovežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom λ , v katerem noben blok ne vsebuje celega $\mathcal{A}$. Potem velja $\frac{|\mathcal{A}|+|\mathcal{B}|}{2} \leq \alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}^{2,\lambda}) \leq |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$.*

V teh primerih, ko je $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$, je prej opisani algoritem $\frac{1}{2}$ -aproksimacijski, torej nam vedno vrne neodvisno množico, ki je kvečjemu dvakrat manjša od največje neodvisne množice.

Imamo tudi drugačno spodnjo mejo za neodvisnostno število grafa $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}$, ki je uporabna, ko imamo več točk kot blokov:

Trditev 12. *Naj bo $\mathcal{B}$ šibko m -terno uravnovežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom λ . Potem je $\frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{B}|} \leq \alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda})$.*

Dokaz. Dokazali bomo, da $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}$ vsebuje neodvisno množico moči vsaj $\frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{B}|}$. Pokažimo, da nek blok mora vsebovati vsaj $\frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{B}|}$ točk. Denimo nasprotno. Ker je vsaka točka vsebovana v nekem bloku, velja $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B = \mathcal{A}$. Po drugi strani pa velja tudi $|\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B| < |\mathcal{B}| \frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{B}|} = |\mathcal{A}|$, kar je protislovje. Obstaja torej blok B , ki vsebuje vsaj $\frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{B}|}$ točk. Tedaj je množica $\mathcal{I} = \{(x, B); x \in B\}$ neodvisna in ima moč vsaj $\frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{B}|}$, kar dokaže trditev. $\square$

Ta spodnja meja nam skupaj s prejšnjo, da naslednjo posledico:

Posledica 13. *Naj bo $\mathcal{B}$ šibko m -terno uravnovežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom λ . Denimo, da je $|\mathcal{B}| \leq k|\mathcal{A}|^{1-\varepsilon}$ za neka $k > 0$ in $0 < \varepsilon < 1$. Tedaj je $\frac{k|\mathcal{A}|^\varepsilon + |\mathcal{B}|}{2} \leq \alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda})$.*

3. Geometrijska konstrukcija grafov brez trikotnikov s polinomskim neodvisnostnim številom

Osredotočimo se na primer, ko grafi $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}$ ne vsebujejo trikotnikov. V primeru, ko je $m = 1$ in $\lambda = 2$, je $|\mathcal{A}| \geq \frac{n}{2}$, kjer je n število incidenčnih parov oziroma vozlišč v grafu $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m,\lambda}$. Zato nam zgornja meja za neodvisnostno število iz prejšnjega razdelka ne porodi nobene asimptotsko netrivialne meje. Poglejmo zato primer, ko je $m = 2$ in $\lambda = 1$ ter označimo pripadajoči graf preprosto kot $\Gamma_{\mathcal{B}}$. Naslednja trditev nam da dve neenakosti, ki povezujeta število točk, blokov in incidenčnih parov v šibko 2-terno uravnoveženem načrtu s parametrom $\lambda = 1$:

Trditev 14. *(Ravsky, Stack Exchange) Naj bo $\mathcal{B}$ šibko 2-terno uravnovežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom $\lambda = 1$. Naj bo n število incidenčnih parov. Označimo $a = |\mathcal{A}|$ in $b = |\mathcal{B}|$. Tedaj velja:*

$$\begin{aligned} a &\geq \frac{n^2}{b^2 - b + n} \\ b &\geq \frac{n^2}{a^2 - a + n}. \end{aligned}$$

Dokaz. Naj bo $a = |\mathcal{A}|$ in $b = |\mathcal{B}|$. Opazujmo tabelo $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, v kateri pobarvamo celico (x, B) , če je $x \in B$. Ker se dve točki skupaj nahajata v kvečjemu enem bloku, celice (x, B_1) , (y, B_1) , (x, B_2) in (y, B_2) ne morejo biti vse pobarvane za katerekoli različne $x, y \in \mathcal{A}$ in različne $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$. Pravimo, da tabela ne vsebuje pravokotnikov poravnanih z osmi.

Pokažimo bolj splošno neenakost za tabele brez pravokotnikov poravnanih z osmi. Imejmo tabelo z a vrsticami in b stolpci. Označimo njene elemente z m_{ij} . Potem ne obstajajo indeksi i, j, k in l , da so t_{ik}, t_{il}, t_{jk} in t_{jl} vsi pobarvane celice. Pravimo, da vrstica i prepove par stolpcev $\{j, k\}$, če sta tako m_{ij} kot m_{ik} pobarvana. Kot smo prej pokazali, nobeni dve vrstici ne moreta prepovedati istega para stolpcev. Označimo z l_i število pobarvanih celic v i -ti vrstici. Tedaj vrstica i prepove natanko $\binom{l_i}{2}$ parov stolpcev. Ker nobeni vrstici ne moreta prepovedati istega para stolpcev in ker je skupaj $\binom{b}{2}$ parov stolpcev, velja $\sum_{i=1}^a \binom{l_i}{2} \leq \binom{b}{2}$ oz. $b^2 - b \geq \sum_{i=1}^a l_i^2 - \sum_{i=1}^a l_i$. Po Cauchy-Schwarzovi neenakosti tedaj dobimo

$$b^2 - b \geq \frac{1}{a} \left(\sum_{i=1}^a l_i \right)^2 - \sum_{i=1}^a l_i.$$

Če se vrnemo v naš kontekst, vemo, da velja $n = \sum_{i=1}^a l_i$ in zato $n^2 - an - a(b^2 - b) \leq 0$. Če to rešimo kot kvadratično neenakost dobimo

$$a \geq \frac{n^2}{b^2 - b + n}.$$

Če bi ponovili isti dokaz, vendar bi opazovali stolpce, ki prepovedujejo pare vrstic namesto obratno, bi dobili

$$b \geq \frac{n^2}{a^2 - a + n}.$$

□

Ti neenakosti nam dasta asimptotske spodnje meje za število točk in blokov v šibko 2-terno uravnoteženem načrtu s parametrom $\lambda = 1$:

Posledica 15. Naj bo $\mathcal{B}$ šibko 2-terno uravnotežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom $\lambda = 1$. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\varepsilon \leq 1$. Če je $\varepsilon > \frac{1}{2}$, potem je $|\mathcal{A}|^\varepsilon + |\mathcal{B}| = \Omega(n^{\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon+1}})$. Sicer je $|\mathcal{A}|^\varepsilon + |\mathcal{B}| = \Omega(n^\varepsilon)$.

Dokaz. Najprej dokažimo primer, ko je $\varepsilon > \frac{1}{2}$. Če je $|\mathcal{B}| = \Omega(n^{\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon+1}})$, je trditev očitna. Sicer je $|\mathcal{B}| = o(n^{\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon+1}})$ in je zato po prvi neenakosti iz prejšnje trditve $|\mathcal{A}|^\varepsilon = \Omega(n^{\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon+1}})$, kar dokaže to trditev. Dokažimo zdaj še primer, ko je $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Če je $|\mathcal{B}| = \Omega(n^{\frac{1}{2}})$, je trditev resnična, ker je $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$. Sicer je $|\mathcal{B}| = o(n^{\frac{1}{2}})$ in je zato po prvi neenakosti iz prejšnje trditve $|\mathcal{A}|^\varepsilon = \Omega(n^\varepsilon)$, kar dokaže to trditev. □

To skupaj s spodnjimi mejami iz prejšnjega razdelka dokaže netrivialne asimptotske spodnje meje za neodvisnostno število velikih poddružin grafov $\Gamma_{\mathcal{B}}$. Prva spodnja meja velja, ko je v $\mathcal{B}$ nad $\mathcal{A}$ število točk asimptotsko strogo manjše od kvadrata števila blokov.

Posledica 16. Naj bo $\mathcal{B}$ šibko 2-terno uravnotežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom $\lambda = 1$. Naj bo $|\mathcal{A}|^\varepsilon \leq k|\mathcal{B}|$ za nek $k > 0$ in nek $\frac{1}{2} < \varepsilon \leq 1$, tj. $|\mathcal{A}|^\varepsilon = O(|\mathcal{B}|)$. Naj bo n število incidenčnih parov, tj. število vozlišč v $\Gamma_{\mathcal{B}}$. Potem je $\alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}) = \Omega(n^{\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon+1}})$.

Druga spodnja meja velja, ko je v $\mathcal{B}$ nad $\mathcal{A}$ število točk asimptotsko strogo večje od kvadrata števila blokov:

Posledica 17. Naj bo $\mathcal{B}$ šibko 2-terno uravnotežen načrt nad $\mathcal{A}$ s parametrom $\lambda = 1$. Denimo, da je $|\mathcal{B}| \leq k|\mathcal{A}|^{1-\varepsilon}$ za nek $k > 0$ in $\frac{1}{2} < \varepsilon < 1$, tj. $|\mathcal{B}| = O(|\mathcal{A}|^{1-\varepsilon})$. Naj bo n število incidenčnih parov, tj. število vozlišč v $\Gamma_{\mathcal{B}}$. Potem je $\alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}) = \Omega(n^{\frac{2\varepsilon}{2\varepsilon+1}})$.

Prejšnji posledici smo navedli samo za $\varepsilon > \frac{1}{2}$, saj nam za manjše ε trditve iz tega razdelka dajo samo $\alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}) = \Omega(n^\varepsilon)$. Vendar to ne bi bila nova spodnja meja, saj nam dejstvo, da je $R(3, t) = \Theta\left(\frac{t^2}{\log t}\right)$, pove, da je $\alpha(\Gamma_{\mathcal{B}}) = \Omega(\sqrt{n \log n})$.

Prejšnje posledice nam povejo, da v primeru, da obstaja šibko 2-terno uravnotežen načrt s parametrom $\lambda = 1$, za katerega je ta spodnja meja za $\alpha(\Gamma_{\mathcal{B}})$ dosežena, mora zanj veljati $|\mathcal{A}| = \omega(|\mathcal{B}|^{2-\varepsilon})$ in $|\mathcal{A}| = o(|\mathcal{B}|^{2+\varepsilon})$ za vsak $\varepsilon > 0$. Posledice nam prav tako povejo, da je v primeru, ko je $|\mathcal{A}| \leq k|\mathcal{B}|$ za nek $k > 0$, neodvisnostno število grafa $\Gamma_{\mathcal{B}}$ na n vozliščih vedno reda $\Omega(n^{\frac{2}{3}})$ za katerokoli izbiro $\mathcal{B}$. Pokažimo, da je ta spodnja meja tesna.

Poglejmo poseben primer tega grafa. Če je k potenca nekega praštevila, konstruiramo P_k tako, da vzamemo končno projektivno ravnino reda k , tj. končno projektivno ravnino s $k^2 + k + 1$ točkami. Za vozlišča vzamemo vse incidenčne pare (p, L) . Množico točk poljubno linearno uredimo in naredimo povezavo med (p, L) in (p', L') , če je $p < p'$, $L \neq L'$ in $p \in L'$. Graf P_k je poseben primer grafa $\Gamma_{\mathcal{B}}$, pri katerem $\mathcal{A}$ vsebuje $k^2 + k + 1$ točk, $\mathcal{B}$ vsebuje $k^2 + k + 1$ blokov in vsak blok vsebuje $k + 1$ točk. Poljubni dve točki sta skupaj vsebovani v natanko enem bloku. Rezultati iz prejšnjega podrazdelka nam dajo naslednjo trditev, ki je bila dokazana že v [5].

Trditev 18. P_k ne vsebuje trikotnikov in velja $\alpha(P_k) \leq 2 \cdot (k^2 + k + 1)$.

Ker ima P_k natanko $(k^2 + k + 1)(k + 1)$ vozlišč, velja $\alpha(P_k) = O(n^{\frac{2}{3}})$, kjer je $n = |V(P_k)|$. Ker ima projektivna ravnina enako število točk in premic, smo s tem pokazali, da je prejšnja asimptotska spodnja meja za primere, ko je $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{B}|$, tesna.

Na enak način lahko v primerih, ko je k potenca nekega praštevila, zgradimo graf A_k iz afine geometrije reda k , tj. afine geometrije s k^2 točkami. Takšna ravnina ima $k^2 + k$ premic in vsaka premica vsebuje k točk. Zato velja naslednja trditev:

Trditev 19. A_k ne vsebuje trikotnikov in velja $\alpha(A_k) \leq 2k^2 + k$.

Ker ima A_k natanko $k(k^2 + k)$ vozlišč, velja $\alpha(A_k) = O(n^{\frac{2}{3}})$, kjer je $n = |V(A_k)|$.

Podali smo dve konstrukciji grafov na n vozliščih z neodvisnostnim številom reda $O(n^{\frac{2}{3}})$, vendar sta obe konstrukciji možni le za določene n . Konstruirajmo zdaj graf, ki ima n vozlišč in neodvisnostno število reda $O(n^{\frac{2}{3}})$, kjer je n poljubno naravno število. Z odvajanjem vidimo, da je $f(k) = \frac{(k+1)^3 + (k+1)^2}{k^3 + k^2}$ padajoča na $[1, \infty)$ in zato velja $\frac{(k+1)^3 + (k+1)^2}{k^3 + k^2} \leq 6$ za $k \in \mathbb{N}$. Zato obstaja k , da je $n \leq k^3 + k^2 \leq 6n$. Po Bertrandovem postulatu [12] obstaja praštevilo p , da je $k \leq p \leq 2k$. Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ množici točk in premic v končni afini geometriji reda p . Potem

je $\sum_{L \in \mathcal{B}} |L| = p^3 + p^2 \geq n$. Za vsak $L \in \mathcal{B}$ lahko izberemo $L' \subseteq L$, da bo $\sum_{L \in \mathcal{B}} |L \setminus L'| = n$. Naj bo zdaj $\mathcal{B}' = \{L \setminus L'; L \in \mathcal{B}, L \neq L'\}$ in $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ množica točk, ki je vsebovana v vsaj kakšnem bloku iz $\mathcal{B}'$. Potem je $\mathcal{B}'$ šibko 2-terno uravnotežen načrt nad $\mathcal{A}'$ s parametrom $\lambda = 1$ in n incidenčnimi pari. Definirajmo $G_n = \Gamma_{\mathcal{B}'}$. Potem velja $\alpha(G_n) \leq |\mathcal{A}'| + |\mathcal{B}'| \leq |\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| = 2p^2 + p \leq 8k^2 + 2k \leq 8 \cdot 6\frac{n}{k}$. Ker je $n \leq k^3 + k^2 \leq 2k^3$, dobimo $\alpha(G_n) \leq 48\sqrt[3]{2}n^{\frac{2}{3}}$, kar dokazuje naslednjo trditev:

Trditev 20. Za vsak $n \in \mathbb{N}$ ima graf G_n natanko n vozlišč, ne vsebuje trikotnikov in velja $\alpha(G_n) = O(n^{\frac{2}{3}})$.

Potrebno je izpostaviti, da so ocene v prejšnjem odstavku zelo grobe. Za vsak $k \geq 4$ velja $\frac{(k+1)^3 + (k+1)^2}{k^3 + k^2} \leq 2$, kar je veliko tesnejša ocena. Ko smo ocenjevali porazdelitev praštevil, smo uporabili le Bertrandov postulat, praštevila pa so veliko bolj gosta. Nadalje, sploh nismo vzeli v obzir, da bi lahko namesto praštevil p vzeli katerokoli potenco nekega praštevil in bi dokaz še vedno veljal. Potence praštevil pa so še občutno bolj goste. Visoka konstanta v oceni bi lahko bila torej občutno nižja.

Na koncu pogledajmo še družino grafov, ki jo lahko dobimo z uporabo šibko 2-terno uravnoteženih načrtov s parametrom $\lambda = 1$ porojenih s točkami in premicami v evklidski ravnini. Naj bo $N \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2; 1 \leq a \leq N, 1 \leq b \leq 2N^2\}$ in $\mathcal{L} = \{(x, mx + b); x \in \mathbb{N}, 1 \leq x \leq N; m, b \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq N, 1 \leq b \leq N^2\}$. Potem je $|\mathcal{P}| = 2N^3$, $|\mathcal{L}| = N^3$ in vsak blok vsebuje N točk. Tako ima $\Gamma_{\mathcal{L}}$ natanko N^4 vozlišč in velja $\alpha(\Gamma_{\mathcal{L}}) = O(n^{\frac{3}{4}})$, kjer je n število vozlišč grafa. Ker vemo, da obstaja neodvisna množica moči $|\mathcal{L}| = n^{\frac{3}{4}}$, prav tako vemo, da je ta zgornja meja tesna. Za poljubno množico točk $\mathcal{A}$ in množico premic $\mathcal{B}$ v evklidski ravnini, za katere je $|\mathcal{A}| \leq k|\mathcal{B}|$ za nek $k > 0$, smo pokazali, da je neodvisnostno število grafa $\Gamma_{\mathcal{B}}$ asimptotsko enako $|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}|$. Po Szemerédi–Trotterjevem izreku [1] potlej vemo, da ima za takšne množice točk in premic v evklidski ravnini prejšnja konstrukcija asimptotsko najmanjše možno neodvisnostno število, saj nam izrek pove, da za poljubni množici točk in premic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ v evklidski ravnini z n incidenčnimi pari velja $|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| = \Omega(n^{\frac{3}{4}})$.

4. Diskusija

V tem članku smo pokazali, da ima za vsak šibko 2-terno uravnotežen načrt $\mathcal{B}$ s parametrom $\lambda = 1$, ki vsebuje kvečjemu $k|\mathcal{B}|$ točk za nek $k > 0$, graf $\Gamma_{\mathcal{B}}$ neodvisnostno število reda $\Omega(n^{\frac{2}{3}})$, kjer je n število njegovih vozlišč. Vendar ostaja odprto vprašanje, ali lahko dobimo družino grafov brez trikotnikov z manjšim neodvisnostnim številom, če uporabimo nek šibko 2-terno uravnotežen načrt s parametrom $\lambda = 1$, ki ima asimptotsko strogo več točk kot blokov. Še eno vprašanje, ki je ostalo odprto v tem članku, je, ali lahko dobimo boljše konstruktivne asimptotske spodnje meje za $R(s, t)$, kot so določene v [8] in [3], za neko izbiro šibko m -terno uravnoteženih načrtov s parametrom $s - m$. Za odgovore na ta vprašanja bi bilo potrebno določiti tesnejšo zgornjo ali spodnjo mejo za neodvisnostno število grafov $\Gamma_{\mathcal{B}}^{m, \lambda}$.

Literatura

- [1] Miklós Ajtai, János Komlós in Endre Szemerédi. “A note on Ramsey numbers”. V: Journal of Combinatorial Theory, Series A 29.3 (1980), str. 354–360. issn: 0097-3165. doi: [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(80\)90030-8](https://doi.org/10.1016/0097-3165(80)90030-8).
- [2] N. Alon. “Explicit Ramsey graphs and orthonormal labelings”. V: Electron. J. Comb. 1 (1994). doi: 10.37236/1192. url: <https://doi.org/10.37236/1192>.
- [3] N. Alon in P. Pudlák. “Constructive lower bounds for off-diagonal Ramsey numbers”. V: Israel Journal of Mathematics 122 (1980), str. 243–251. doi: 10.1007/BF02809902.
- [4] N. G. de Bruijn in P. Erdős. “On a combinatorial problem”. V: Proceedings of the Section of Sciences of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen te Amsterdam 51.10 (1948), str. 1277–1279. url: <https://pure.tue.nl/ws/portalfiles/portal/4300528/597479.pdf>.
- [5] B. Codenotti, P. Pudlák in G. Resta. “Some structural properties of low-rank matrices related to computational complexity”. V: Theor. Comput. Sci. 235.1 (2000), str. 89–107. doi: 10.1016/S0304-3975(99)00185-1. url: [https://doi.org/10.1016/S0304-3975\(99\)00185-1](https://doi.org/10.1016/S0304-3975(99)00185-1).
- [6] R. A. Fisher. “An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks”. V: Annals of Eugenics 10.1 (1940), str. 52–75. doi: <https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1940.tb02237.x>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1111/j.1469-1809.1940.tb02237.x>. url: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1469-1809.1940.tb02237.x>.
- [7] J. H. Kim. “The Ramsey number $R(3, t)$ has order of magnitude $t^2 / \log t$ ”. V: Random Structures & Algorithms 7.3 (1995), str. 173–207. doi: <https://doi.org/10.1002/rsa.3240070302>. eprint: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/rsa.3240070302>. url: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/rsa.3240070302>.
- [8] Alexandr Kostochka, Pavel Pudlák in Vojtech Rödl. “Some constructive bounds on Ramsey numbers”. V: Journal of Combinatorial Theory, Series B 100.5 (2010), str. 439–445. issn: 0095-8956.

doi: <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2010.01.003>.

url: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0095895610000043>.

[9] F. P. Ramsey. "On a Problem of Formal Logic". V: *Proceedings of the London Mathematical Society* s2-30.1 (1930), str. 264–286. doi: <https://doi.org/10.1112/plms/s2-30.1.264>.

eprint: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/plms/s2-30.1.264>.

url: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/plms/s2-30.1.264>.

[10] D.R. Stinson. *Combinatorial Designs: Construction and Analysis*. [ProQuest Ebook Central]. Springer, 2004. isbn: 9780387954875. url: <https://books.google.si/books?id=jfF-rncVXNwC>.

[11] E. Szemerédi in W. T. Trotter. "Extremal problems in discrete geometry". V: *Combinatorica* 3 (1983), str. 381–392. url: <https://doi.org/10.1007/BF02579194>.

[12] P. L. Tchebichef. "Mémoire sur les nombres premiers." fre. V: *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (1852), str. 366–390. url: <http://eudml.org/doc/234762>.

Self separating properties of sets

Predavateljica: Maruša Lekše, *Institute of Mathematics, Physics and Mechanics, Ljubljana*

Soavtorji: Kamilla Rekvényi; Marco Barbieri; Primož Potočnik

Let G be a transitive permutation group of degree n . Let $\mathbf{m}(G)$ be the largest integer such that, for every set A of this size, we are guaranteed the existence of a permutation $g \in G$ such that $A \cap A^g$ is empty. By Neumann's Separation Lemma, we know that $\mathbf{m}(G) \geq \sqrt{n}$. Experimental evidence suggests that, unless G contains a large alternating subgroup, $\mathbf{m}(G)$ grows asymptotically as $\mathcal{O}(\sqrt{n})$. We discuss for which families of permutation groups we can currently establish this expected bound.

This is joint work with Marco Barbieri, Kamilla Rekvényi and Primož Potočnik.

Prenova učnega načrta za matematiko: teoretična ozadja in didaktične usmeritve

Predavateljica: Vida Manfreda Kolar, *University of Ljubljana, Faculty of Education*

Predavanje obravnava teoretična izhodišča in didaktične smernice prenovljenega učnega načrta za matematiko v osnovni šoli, s poudarkom na postopnem oblikovanju abstraktnih matematičnih pojmov ter na vlogi reprezentacij pri razvijanju razumevanja in prenosu znanja. Temeljna izhodišča črpamo iz operativno- strukturnega pojmovanja abstraktnih matematičnih konceptov, Sfardine teorije reifikacije ter Tall in Vinnerjeve teorije konceptne slike.

Na treh vsebinskih sklopih – funkcije, cela števila in racionalna števila – so predstavljeni izzivi, ki jih imajo učenci pri prehodu od konkretnih izkušenj k formalnim definicijam, ter strategije, ki podpirajo fleksibilno prehajanje med različnimi reprezentacijami (konkretno, grafično, simbolno) in interpretacijami istega koncepta. Poseben poudarek je namenjen prepoznavanju napačnih in pomanjkljivih predstav, načrtovanju dejavnosti za njihovo odpravljanje ter uravnoteženemu razvoju konceptualnega in proceduralnega znanja.

Analizirani so tudi rezultati raziskav, ki kažejo na pogoste težave učencev in študentov pri razumevanju negativnih števil in ulomkov, kar potrjuje pomen usklajenega uvajanja matematičnih konceptov s stopnjami kognitivnega razvoja in pomen premišljene rabe modelov. Prispevek tako povezuje teoretične koncepte z empiričnimi ugotovitvami ter jih umešča v sodobne didaktične pristope, ki jih spodbuja prenovljeni učni načrt.

Kako merimo prepletenost? / How to measure linking?

Predavatelj: Luka Marčič, *Fakulteta za matematiko in fiziko, Univerza v Ljubljani*

Prispevek obravnava prepletenost spleto v kontekstu spletne homotopije. Predstavljene so osnovne definicije in invariante ter relativno preprosti klasifikaciji spletno homotopskih tipov spleto s tremi ali manj komponentami.

tami in skoraj preprostih spleto s poljubnim številom komponent v evklidskem prostoru. Prispevek se konča z razpravo o sodobnejših rezultatih ter bodočem delu na področju raziskovanja spletne homotopije.

The presentation discusses linking in the context of link homotopy. It presents the basic definitions and invariants, along with the relatively simple classifications of link homotopy types of links with three or fewer components and almost simple links with an arbitrary number of components in Euclidean space. The presentation concludes with a discussion of contemporary results and future work in researching link homotopy.

Lie algebra diameters

Predavatelj: Matevž Mišičič, *IMFM, FMF*

We prove diameter bounds for finite simple Lie algebras that parallel Babai's conjecture for finite simple groups. Specifically, we show that any nonabelian finite simple Lie algebra g over F_p has diameter $O((\log |g|)^D)$ for $D \approx 3.21$ with respect to any generating set.

The Four-Color Theorem and its generalizations

Predavatelj: Bojan Mohar, *IMFM*

The Four-Color Theorem had profound influence on the developments of graph theory. It was proved 49 years ago by Appel and Haken. However, its proof left many questions unanswered. Is this result just a coincidence, or are there deeper reasons behind it? We try to provide deeper understanding why the 4CT is true. The speaker will give an overview of recent breakthrough results obtained in collaboration with Ken-ichi Kawarabayashi, Carsten Thomassen, Mikkel Thorup, Yuta Inoue, Atsuyuki Miyashita, and Tomohiro Sonobe.

The main results are based on a strengthening of the 4CT that includes the "flat curvature" analysis, which in particular leads to optimized algorithms for 4-coloring planar graphs. Moreover, it gives way towards resolutions of old conjectures of Grunbaum (1969), Albertson (1981), and Robertson (1994), and also gives a strong version of the Tutte 4-flow conjecture for graphs of small Euler genus.

Characterizations of minimally tough graphs in some graph classes

Predavateljica: Laura Ogrin, *UP FAMNIT*

Soavtorja: J. Pascal Gollin, *UP FAMNIT*; Martin Milanič, *UP FAMNIT, UP IAM*

For a non-negative real number t , a graph G is called t -tough if for every vertex set $S \subseteq V(G)$ that separates G , we have $t \cdot c(G - S) \leq |S|$, where $c(G - S)$ is the number of components of $G - S$. The toughness of a non-complete graph is the largest t for which the graph is t -tough, while the toughness of complete graphs is infinity. The concept of toughness was introduced and studied in connection with Hamiltonicity, as every Hamiltonian graph is 1-tough.

A graph G is minimally t -tough if the toughness of G is t and the removal of any edge from G decreases the toughness. A graph is minimally tough if it is complete or minimally t -tough for some real number t . Although deciding if a graph is minimally tough is a difficult problem in general, minimally tough graphs have been characterized in some graph classes. We characterize minimally tough graphs in the classes of P_4 -free graphs, complete multipartite graphs, and complements of forests. We also characterize minimally tough co-chordal graphs whose complement has diameter at least 3.

Infinitely connected Fatou components in a family of numerical methods

Predavatelj: Dan Paraschiv, *IMFM Ljubljana*

We study the family of Chevushev-Halley family of numerical methods, previously introduced and studied by Campos, Canela, and Vindel. We prove the existence of parameters for which all Fatou components are

infinitely connected, while components of the Julia sets are quasiconformal deformations of the Newton-type Julia set.

An explicit form of Ingham's zero density estimate

Predavatelj: Aleksander Simonič, *UP FAMNIT*

Soavtor: Shashi Chourasiya, *UNSW Canberra*

Ingham (1940) proved that $N(\sigma, T) \ll T^{3(1-\sigma)/(2-\sigma)} \log^5 T$, where $N(\sigma, T)$ counts the number of the non-trivial zeros ρ of the Riemann zeta-function with $\Re\{\rho\} \geq \sigma \geq 1/2$ and $0 < \Im\{\rho\} \leq T$. Such estimates are often valuable in the distribution theory of prime numbers. In this talk I will present an explicit version of this result with the exponent $(7 - 5\sigma)/(2 - \sigma)$ of the logarithmic factor. The crucial ingredient in the proof is an explicit estimate with asymptotically correct main term for the fourth power moment of the Riemann zeta-function on the critical line, a result which is of independent interest.

This is joint work with Shashi Chourasiya (UNSW Canberra).

Izzivi poučevanja finančne matematike v angleščini

Predavatelj: Aleš Toman, *Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta*

Prispevek

Povzetek. Dijaki pri matematiki spoznajo različne tipe obrestovanja in obrestnih mer ter s pomočjo načela ekvivalence glavnice vrednotijo periodične denarne tokove, npr. določijo anuiteto kredita. Obravnava finančne matematike v slovenščini je terminološko standardizirana in reševanje nalog hitro postane rutinska uporaba matematičnih orodij v različnih ekonomskih kontekstih. Situacija se hitro spremeni, ko želimo iste vsebine poučevati v angleščini. V angleški literaturi zama isčemo ustrezne relativne in konformne obrestne mere, po drugi strani pa so nekateri izrazi (npr. annuity) standardizirani in jih moramo v slovenščini opisati z več besedami. V prispevku predstavimo slovensko in angleško finančno terminologijo. Mladi se pri vodenju osebnih financ ne ozirajo na meje Slovenije. Učitelje matematike zato spodbudimo, da zaradi izjemnega pomena finančne pismenosti v pouk dodajo še izbrane angleške izraze.

1. Uvod

Obresti so nadomestilo za uporabo zneska, ki ga posojilodajalec za določen čas prepusti posojilojemalcu (Banka Slovenije, 2008). S pravili računanja obresti se dijaki srečajo pri pouku matematike (Predmetna komisija, 2008): razlikujejo navadno in obrestno obrestovanje, konformno in relativno obrestno mero, uporabijo načelo ekvivalence glavnice, izračunajo anuiteto in izdelajo amortizacijski načrt kredita. Obravnavane vsebine so izjemnega pomena pri razvijanju finančne pismenosti mladih (Vreš, 2025). Ker mladi informacije in pojasnila pogosto iščejo na spletu, v drugem poglavju tega prispevka ponovimo osnove obrestnega računa in za izraze iz slovenskih učbenikov poiščemo angleške ustrezne. V tretjem poglavju se posvetimo obravnavi finančnih rent in izpeljemo 4 najpogostejše uporabljene obrazce za njihovo vrednotenje. Pri tem uporabimo dva pristopa: matematični pristop temelji na seštevanju geometrijskih vrst, ekonomski pristop pa na iskanju strategije, ki v prihodnosti ponuja enaka izplačila. Zakon ene cene določa, da imata takšna strategija in renta enako začetno ceno.

2. Obrestni račun

Slovenska literatura, npr. (Kokol Bukovšek in Ferbar Tratar, 2019; Marovt, 2010), razlikuje med dekurzivnim in anticipativnim obrestovanjem. Pri dekurzivnem (*interest in arrears*) se obresti obračunajo ob koncu obrestovalnega obdobja na osnovi začetne glavnice, pri anticipativnem (*discount interest*) pa na začetku obdobja na osnovi končne glavnice. Priporočila Banke Slovenije (2008) bankam nalagajo uporabo dekurzivnega obrestovanja, zato na njem temelji tudi ta prispevek. Če začetno glavnico (*initial balance*) B_0 v banko naložimo danes, bo v prihodnosti vredna $B_T = B_0 + I$, kjer je I znesek obresti (*interest*).

Navadno in (diskretno) obrestno obrestovanje

Znesek obresti pri navadnem obrestovanju (*simple interest*) določimo z obrazcem (Toman, 2019) $I = B_0 \cdot R \cdot T$, kjer sta R letna obrestna mera (*annual interest rate*) in T čas, izražen v letih. Višina končne glavnice je zato

$$B_T = B_0 + B_0 \cdot R \cdot T = B_0(1 + R \cdot T).$$

Pri obrestnem obrestovanju (*compound interest*) obresti periodično prištevamo glavnici (*interest capitalization*) in jih nato skupaj z glavnico obrestujemo. Med zaporednimi pripisi obresti uporabljamo navadno obrestovanje. Pri letnem obrestovanju (*annual compounding*) je glavnica po enem letu vredna $B_1 = B_0 + B_0 \cdot R = B_0(1 + R)$, po T letih pa (Toman, 2019)

$$B_T = B_0(1 + R)^T.$$

Izrazu $k = 1 + R$ rečemo letni obrestni faktor (*annual interest factor*).

Relativna in konformna obrestna mera

Relativno in konformno obrestno mero potrebujemo, kadar je pripis obresti bolj pogost kot letni in želimo določiti obrestno mero za krajše obdobje (Čibej, 2011). Obravnavali bomo le mesečno obrestovanje (*monthly compounding*), saj je to pri poslih s prebivalstvom najpogostejše. Pri relativnem načinu mesečno obrestno mero dobimo tako, da letno obrestno mero delimo z 12, torej $r_{\text{rel}} = \frac{R}{12}$, in nato določimo mesečni obrestni faktor $k_{\text{rel}} = 1 + r_{\text{rel}} = 1 + \frac{R}{12}$. Po prvem mesecu obrestovanja je glavnica enaka kot pri navadnem obrestovanju. Ko pa obresti pripišemo glavnici, se v drugem mesecu obrestuje povišana glavnica. Po enem letu (12 mesecih) glavnica znaša

$$B_1 = B_0 \left(1 + \frac{R}{12}\right)^{12} > B_0(1 + R),$$

torej več, kot če bi pri isti obrestni meri uporabili letno (ali navadno) obrestovanje. Pri konformnem obrestovanju mesečno obrestno mero določimo tako, da z mesečnim obrestovanjem po enem letu dobimo enako končno glavnico kot pri letnem (ali navadnem) obrestovanju z isto letno obrestno mero. Najprej določimo mesečni obrestni faktor $k_{\text{kon}} = \sqrt[12]{1 + R}$ in nato še mesečno obrestno mero $r_{\text{kon}} = \sqrt[12]{1 + R} - 1$.

Priporočila Banke Slovenije (2008) bankam nalagajo uporabo navadnega obrestovanja po pogodbeni (nominalni) letni obrestni meri znotraj posameznega obdobja, zato se v praksi uporablja relativna obrestna mera. Angleških ustreznikov za relativno in konformno obrestno mero ni. Pri izposoji denarja banka letno obrestno mero poimenuje *annual percentage rate*, nato pa velja, da se mesečno obrestno mero določi na relativni način. Situacija je drugačna, če komitent v banki varčuje. Tedaj banka letno obrestno mero poimenuje *annual percentage yield* ali *effective annual rate* in ta vključuje tudi obresti na obresti. Mesečno obrestno mero depozita se zato določi na konformni način (Berk in DeMarzo, 2014).

Ekvivalenca denarnih tokov

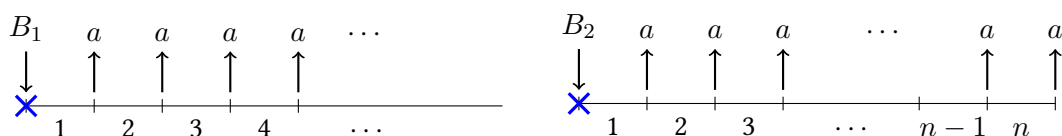
Obravnavo več vplačil ali izplačil pričnemo s skico denarnih tokov na časovni premici (*time line*). Če so periodični denarni tokovi prenumerandni (*in advance*), so plačani na začetku vsakega obdobja, če so postnumerandni (*in arrears*), pa ob koncu vsakega obdobja. Ko denarni tok pomikamo v desno po premici, ga naobrestimo (*compound*), ko ga pomikamo v levo, pa razobrestimo (*discount*). Ekvivalenca denarnih tokov (*cash flow equivalence*) pomeni, da sta izhodiščni in naobresteni (oz. razobresteni) denarni tok številsko različna, a vrednostno ekvivalentna. Denarne tokove lahko med sabo seštevamo ali odštevamo, če so preračunani na isti trenutek, ki mu rečemo redukcijski termin (*valuation date*). Pri reševanju nalog z več vplačili ali izplačili je v finančni literaturi (Berk in DeMarzo, 2014) pogosta uporaba obrazcev, ki za denarne tokove izračunajo njihovo sedanjo vrednost (*present value*), to je na začetku prvega obdobja, ali pa prihodnjo vrednost (*future value*), to je na koncu zadnjega obdobja.

3. Terminologija in vrednotenje rent

Renta je finančni produkt, ki imetniku zagotavlja zaporedna izplačila v enakih časovnih razmikih. Pri standardni renti so izplačila postnumerandna. Pri določanju cene rente uporabljamo obrestno obrestovanje, pri katerem so obrestovalna obdobja usklajena z dinamiko izplačil. Naj bo r obdobjna obrestna mera in $k = 1 + r$ obdobjni obrestni faktor. Privzemimo, da je $r > 0$ in zato $k > 1$ in $|1/k| < 1$.

Večna renta s konstantnimi izplačili

Za vrednotenje so najenostavnejše večne rente (*ordinary perpetuity*; pridevnik *ordinary* lahko spustimo) s konstantnimi izplačili v višini a (*annuity amount*). Denarni tokovi večne rente so prikazani na sliki 1 levo.



Slika 1: Večna (levo) in končna (desno) renta s konstantnimi postnumerandnimi izplačili.

Ceno večne rente določimo tako, da razobrestimo vsa njena izplačila, pri tem faktorju $\frac{1}{k} = \frac{1}{1+r}$ rečemo diskontni faktor (*discount factor*). Z uporabo neskončne geometrijske vrste dobimo

$$B_1 = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \frac{a}{k^3} + \dots = \frac{a}{k} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2} + \dots \right) = \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} = \frac{a}{k-1} = \frac{a}{r}.$$

Določimo ceno rente še z uporabo zakona ene cene. Če investitor danes v banki veže znesek B_1 za eno obdobje, bo ob koncu obdobja prejel obresti v višini $a = B_1 r$. Znesek obresti si izplača, glavnico B_1 pa ponovno veže za še eno obdobje. Investitor postopek neomejeno ponavlja in s tem replicira vsa izplačila večne rente. Zato mora biti cena rente enaka potrebni investiciji B_1 . Tako dobimo zvezo $B_1 = \frac{a}{r}$.

Končna renta s konstantnimi izplačili

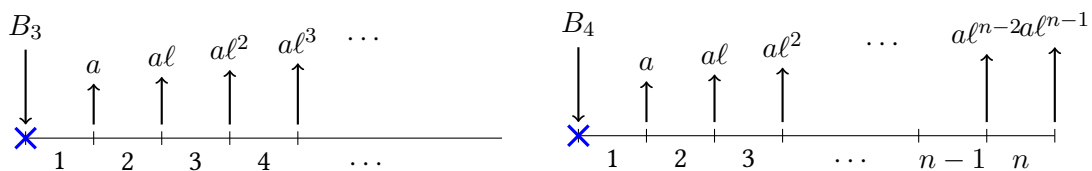
Število izplačil v renti je lahko končno; privzemimo, da rento prejemamo n obdobj. Denarni tokovi končne rente (*annuity*) so prikazani na sliki 1 desno. Cena rente z uporabo končne geometrijske vrste znaša

$$B_2 = \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2} + \dots + \frac{a}{k^n} = \frac{a}{k^n} (k^{n-1} + k^{n-2} + \dots + 1) = \frac{a}{k^n} \cdot \frac{k^n - 1}{k - 1} = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}.$$

Uporabimo še zakon ene cene. Investitor si danes v banki sposodi znesek $\frac{N}{(1+r)^n}$ za n obdobj in hkrati veže znesek N za eno obdobje, oboje po isti obrestni meri. Ob koncu prvega obdobja prejme obresti v višini $a = Nr$. Znesek obresti izplača, glavnico N pa ponovno veže za eno obdobje. Če skupaj izvede n zaporednih vezav, izplačane obresti replicirajo izplačila rente. Na koncu n -tega obdobja s prejeto glavnico N pokrije še začetno izposojlo. Cena rente je zato enaka potrebni investiciji v višini $B_2 = N - \frac{N}{(1+r)^n} = N \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}$. Upoštevamo še zvezo $N = \frac{a}{r}$ in dobimo $B_2 = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}$.

Večna renta z naraščajočimi izplačili

Doslej je bila višina vseh izplačil rente enaka (*fixed annuity*). Višina izplačila lahko s časom narašča ali pada (*growing* ali *decreasing annuity*), lahko pa se spreminja v skladu z izbranim indeksom (*variable annuity* ali *indexed annuity*), npr. borznim indeksom ali inflacijo. Določimo ceno naraščajoče večne rente (*growing perpetuity*), pri kateri prvo izplačilo znaša a , vsako nadaljnje pa je za stopnjo rasti (*growth rate*) g višje od predhodnega. Vpeljimo faktor rasti (*growth factor*) $\ell = 1 + g$ in privzemimo, da je $0 < g < r$ in zato $|\ell/k| < 1$. Denarni tokovi takšne rente so prikazani na sliki 2 levo.



Slika 2: Večna (levo) in končna (desno) renta z naraščajočimi postnumerandnimi izplačili.

Ceno večne rente z naraščajočimi izplačili določimo z uporabo geometrijske vrste:

$$B_3 = \frac{a}{k} + \frac{a\ell}{k^2} + \frac{a\ell^2}{k^3} + \dots = \frac{a}{k} \left(1 + \frac{\ell}{k} + \frac{\ell^2}{k^2} + \dots \right) = \frac{a}{k} \cdot \frac{1}{\frac{\ell}{k} - 1} = \frac{a}{\ell - k} = \frac{a}{g - r},$$

in še z uporabo zakona ene cene. Če investitor danes v banki veže znesek B_3 za eno obdobje, bo ob koncu obdobja prejel obresti v višini $B_3 r$. Ker si mora zagotoviti naraščajoča izplačila, si del obresti v višini $a = B_3(r - g)$ izplača, preostali del $B_3 g$ in glavnico B_3 pa ponovno veže za eno obdobje. Glavnica v drugem obdobju znaša $B_3 + B_3 g = B_3 \ell$ in je ravno za faktor rasti ℓ višja od glavnice v prvem obdobju. Ob koncu drugega obdobja obresti znašajo $B_3 \ell r$. Investitor si znesek $B_3 \ell(r - g) = a\ell$ izplača, preostanek pa skupaj z glavnico ponovno veže. Glavnica v tretjem obdobju znaša $B_3 \ell + B_3 \ell g = B_3 \ell^2$. Investitor postopek neomejeno ponavlja. Opazimo, da izplačila obresti naraščajo s faktorjem ℓ , zato replicirajo izplačila rente. Cena rente je enaka potrebni investiciji B_3 . Tako dobimo zvezo $B_3 = \frac{a}{r-g}$.

Končna renta z naraščajočimi izplačili

Tudi rente z naraščajočimi izplačili so lahko končne. Določimo ceno n -obdobne naraščajoče rente (*growing annuity*), pri kateri prvo izplačilo znaša a , vsako nadaljnje pa je za stopnjo rasti g višje od predhodnega. Denarni tokovi takšne rente so prikazani na sliki 2 desno. Z uporabo geometrijske vrste pri postnumerandnih izplačilih dobimo

ceno:

$$\begin{aligned} B_4 &= \frac{a}{k} + \frac{a\ell}{k^2} + \dots + \frac{a\ell^{n-1}}{k^n} = \frac{a}{k} \left(1 + \frac{\ell}{k} + \dots + \frac{\ell^{n-1}}{k^{n-1}} \right) = \frac{a}{k} \cdot \frac{\left(\frac{\ell}{k}\right)^n - 1}{\frac{\ell}{k} - 1} \\ &= \frac{a}{\ell - k} \cdot \frac{\ell^n - k^n}{k^n} = \frac{a}{r - g} \cdot \frac{(1+r)^n - (1+g)^n}{(1+r)^n}. \end{aligned}$$

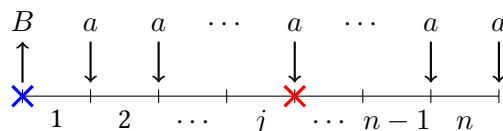
Uporabimo še zakon ene cene. Investitor si danes v banki sposodi znesek $\frac{N\ell^n}{(1+r)^n}$ za n obdobj in hkrati veže znesek N za eno obdobje, oboje po isti obrestni meri. Ob koncu prvega obdobja prejme obresti v višini Nr . Del obresti v višini $a = N(r - g)$ si izplača, preostali del Ng in glavnico N pa ponovno veže za eno obdobje. Postopek nadaljuje enako kot pri večni renti, le da skupaj izvede n vezav. Ob koncu n -tega obdobja s prejšnjo glavnico v višini $N\ell^n$ povrne še začetno izposojlo. Cena rente je zato enaka $B_4 = N - \frac{N\ell^n}{(1+r)^n} = N \left(1 - \frac{(1+g)^n}{(1+r)^n} \right)$. Upoštevamo še zvezo $N = \frac{a}{r-g}$ in dobimo $B_4 = \frac{a}{r-g} \cdot \frac{(1+r)^n - (1+g)^n}{(1+r)^n}$.

Pri vseh opisanih rentah prvo izplačilo zapade v prvem obdobju. Takšne rente so takojšnje rente (*immediate annuity*). Pri katerikoli izmed njih lahko zamaknemo prvo izplačilo za nekaj obdobj in tako dobimo odloženo rento (*deferred annuity*). Pri obravnavanih končnih rentah je bilo število izplačil vnaprej znano (*annuity certain*). Poznamo še doživljenjsko rento (*lifetime annuity*), ki jo upravičenec prejema do svoje smrti, zato ob nakupu število izplačil ni znano. Poleg rent s postnumerandnimi izplačili poznamo še rente s prenumerandnimi izplačili. Njihova angleška poimenovanja dobimo tako, da znanim izrazom dodamo besedo *due*, npr. *annuity due*, *growing perpetuity due* itd.

Primer uporabe izpeljanih obrazcev

Načelo ekvivalence glavnice pravi, da mora biti vsota vseh vplačil (*outflows*), preračunanih na izbrani trenutek, enaka vsoti vseh prejetih izplačil (*inflows*), preračunanih na isti trenutek. Kljub izjemni uporabnosti zapisane trditve je v tako splošni obliki v angleščini ne najdemo. Poglejmo si, kako z uporabo izpeljanih obrazcev določimo višino mesečne anuitete (*instalment amount*) kredita (*instalment loan*).

Naj bo B glavnica (*balance* ali *principal*) stanovanjskega kredita (*mortgage*), ki jo povrnemo v n enakih mesečnih postnumerandnih anuitetah a . Denarni tokovi kredita so prikazani na sliki 3. Naj bo r mesečna obrestna mera.



Slika 3: Denarni tokovi stanovanjskega kredita.

V zaporedju anuitet prepoznamo končno rento s konstantnimi denarnimi tokovi. Če redukcijski termin postavimo na začetek prvega leta (na sliki 3 označen z modro), je sedanja vrednost vseh izplačil kredita enaka B , sedanja vrednost vseh vplačil pa

$$B_2 = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r)^n}.$$

Z enačenjem sedanjih vrednosti dobimo obrazec

$$a = Br \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

S pomočjo amortizacijskega načrta (*amortization schedule*) lahko spremljamo, kako se dolg do banke z časom znižuje. Višino preostalega dolga (*outstanding balance*) $\tilde{B}_j$ takoj po plačilu j -tega obroka lahko določimo tudi tako, da na ta trenutek (na sliki 3 označen z rdečo) razobrestimo vseh $n - j$ neplačanih anuitet. Tako dobimo

$$\tilde{B}_j = \frac{a}{r} \cdot \frac{(1+r)^{n-j} - 1}{(1+r)^{n-j}}.$$

Upoštevamo še obrazec za višino anuitete in po preurejanju dobimo

$$\tilde{B}_j = B \cdot \frac{(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \cdot \frac{(1+r)^{n-j} - 1}{(1+r)^{n-j}} = B \cdot \frac{(1+r)^n - (1+r)^j}{(1+r)^n - 1}.$$

Preostala glavnica po določenem številu anuitet je pomembna zlasti pri kreditih z variabilno obrestno mero (*variable rate loan*), saj lahko z njo določimo novo višino anuitete v odvisnosti od nove obrestne mere.

4. Zaključek

Izrazi in oznake v finančni matematiki so rezultat tradicije, zakonodaje in priporočil, ki veljajo v posamezni državi. Poučevanje finančne matematike v mednarodni skupini je zato izziv. V prispevku so angleški izrazi in oznake urejene na način, ki najbolj ustreza slovenskim standardom in ga na Ekonomski fakulteti uporabljamo pri poučevanju matematike v angleščini. Z uporabo obrazcev za vrednotenje rent smo prikazali še pristop k analizi periodičnih denarnih tokov, ki je pogost v finančni literaturi. S tem matematiko povežemo z bolj specializiranimi finančnimi predmeti, ki jih študenti srečajo pri nadaljevanju študija.

Literatura

Banka Slovenije (2008). Priporočila o načinu obračunavanja obresti za posle s prebivalstvom (spremno besedilo: J. A. Čibej). Združenje bank Slovenije in Banka Slovenije.

Berk, J. B., & DeMarzo, P. M. (2014). *Corporate Finance* (3. izdaja). Pearson Education.

Čibej, J. A. (2011). Kako računati obresti. Združenje bank Slovenije.

Kokol Bukovšek, D., & Ferbar Tratar, L. (2019). *Matematika za poslovne in ekonomske vede*. Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta.

Marovt, J. (2010). Anticipativno obrestovanje. *Matematika v šoli*, XVI, 79–86.

Predmetna komisija (A. Žakelj in drugi) (2008). Učni načrt: matematika; Gimnazija: splošna, klasična in strokovna gimnazija. Ministrstvo za šolstvo in šport in Zavod RS za šolstvo.

Toman, A. (2019). *Mathematics for Business and Economics: Theory Review and Problems*. Univerza v Ljubljani, Ekonomska fakulteta.

Vreš, S. (2025). Povežimo matematične vsebine s finančno pismenostjo. *Matematika v šoli*, 31(1), 16–23.

Carlemanova aproksimacija brez kritičnih točk / Carleman approximation without critical points

Predavatelj: Beno Učakar, UL FMF, IMFM

Prispevek

Povzetek. We present the class of semi-admissible subsets of an open Riemann surface on which Carleman approximation by non-critical holomorphic functions is possible. Using these, we can characterize closed sets with empty interior on which continuous functions can be approximated by non-critical holomorphic ones. We also show how to use this result to construct a non-critical entire function with arbitrary asymptotic values.

The classical Carleman approximation theorem states that for any complex valued continuous function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ and any continuous positive valued function $\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, there exists an entire function $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ such that $|F(x) - f(x)| < \varepsilon(x)$ holds for every $x \in \mathbb{R}$. The distinguishing feature of Carleman approximation is that ε is a function, thus the difference between the original function f and the approximating function F can be controlled pointwise. In particular, the difference can be made arbitrarily small as we go off to infinity along the real line. Thus, this is a stronger result than just *uniform approximation*, where ε would be a constant function.

This result was proven by T. Carleman in [3] and was later generalized to other subsets of the complex plane and even to subsets of open Riemann surfaces. What exactly generalized means in this context is made more precise by the next definition.

Definition 1. We say that a closed subset E of an open Riemann surface X is a set of Carleman approximation, if for every continuous positive valued function $\varepsilon: E \rightarrow (0, \infty)$ and every function $f \in \mathcal{A}(E)$ there exists a global holomorphic function $F \in \mathcal{O}(X)$ such that $|F(p) - f(p)| < \varepsilon(p)$ holds for every $p \in E$.

Here $\mathcal{A}(E)$ is the class of continuous function on E which are holomorphic on the interior of E , that is $\mathcal{A}(E) = \mathcal{C}(E) \cap \mathcal{O}(\dot{E})$. In particular if $\dot{E} = \emptyset$, we have $\mathcal{A}(E) = \mathcal{C}(E)$.

The question thus becomes which closed subsets of the open Riemann surface X are sets of Carleman approximation. Luckily, we have a full description of such sets. A complete characterization was given by A. Boivin in [2]. In what follows X^* represents the one point compactification of the open Riemann surface X .

Theorem 2. A closed set $E \subseteq X$ in an open Riemann surface X is a set of Carleman approximation if and only if it satisfies the following three properties:

- (i) The set $X^* \setminus E$ is connected.
- (ii) The set $X^* \setminus E$ is locally connected (at ∞).
- (iii) For each compact set $K \subseteq X$ there exists a compact set $K \subseteq Q \subseteq X$ such that no component of the interior $\text{int}(E)$ of E meets both K and $X \setminus Q$.

Let us investigate these three conditions more precisely. Condition (i) has to do with the notion of holes. Recall, that for a closed set $E \subseteq X$ a *hole* is a relatively compact connected component of $X \setminus E$. We denote the union of all the holes of the set E by $h(E)$.

Consider for example the unit circle $\mathbb{S}^1$ in the complex plane. Its complement has two connected components, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ and $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$, but only the first is relatively compact. Thus $h(\mathbb{S}^1) = \mathbb{D}$.

It is an easy exercise in topology to show that a closed set E has no holes if and only if the set $X^* \setminus E$ is connected. Having no holes is quite important in complex approximation theory as it is a necessary condition to achieve even uniform approximation on compact sets. For compact sets, Mergelyan's theorem tells us that it is also a sufficient condition.

Now let's investigate condition (ii). Here we come upon the following notion.

Definition 3. A closed set $E \subseteq X$ has the bounded exhaustion hull property or BEH property, if the set $h(E \cup K)$ is relatively compact for every compact set $K \subseteq X$.

Let's look at some examples. The horizontal strip $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im}(z)| \leq 1\} \subseteq \mathbb{C}$ has the BEH property, since for any compact $K \subseteq \mathbb{C}$ the holes of $E \cup K$ are contained in some bounded region. It's also easy to see that every compact set has the BEH property. For a non-example consider E to be the closure of the graph of the function $f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ on $(0, \infty)$ as a subset of $\mathbb{C}$. Taking K to be a closed disc around the origin, we see that the holes of $E \cup K$ stretch out to infinity, so the set $h(E \cup K)$ is not relatively compact.

A slightly more involved exercise in topology is to show that a set E has the BEH property if and only if $X^* \setminus E$ is locally connected at infinity. It turns out that the BEH property is a necessary condition for uniform approximation on general closed sets, as it ensures that the set behaves nicely near infinity. Thus, if we want to have uniform approximation on a closed set, the set must be without holes and have the BEH property. In the case when $X = \mathbb{C}$, such sets are called *Arakelyan sets* and the famous Arakelyan approximation theorem states that these two necessary conditions are also sufficient.

Finally let's consider condition (iii). The statement of this condition is a bit more cumbersome, so let's again look at some examples. Taking $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |\text{Im}(z)| \leq 1\}$ to be a strip and $K = \overline{\mathbb{D}}$ shows that a strip does not satisfy this condition, since the interior of the strip certainly hits both K and the complement of any compact Q containing K .

On the other hand, the set $E = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \{z \in \mathbb{C} \mid |z - m| \leq \frac{1}{3}\}$, which is a union of closed disjoint discs, does satisfy condition (iii). For a given compact set $K \subseteq \mathbb{C}$ let Q be the union of K and all the discs of E that K intersects. An interior component of E is just the interior of one of the discs and is thus clearly contained in K or in $\mathbb{C} \setminus Q$.

Condition (iii) comes into play when we want to go beyond uniform approximation and want ε to be a function. In his paper [5], P. Gauthier showed the following.

Theorem 4. A closed set $E \subsetneq X$ that does not satisfy condition (iii) is a set of uniqueness i.e. there exist a continuous function $\lambda: X \rightarrow (0, \infty)$ such that if a global holomorphic function $f \in \mathcal{O}(X)$ satisfies

$$|f(p)| < \lambda(p)$$

for every $p \in E$ then $f \equiv 0$.

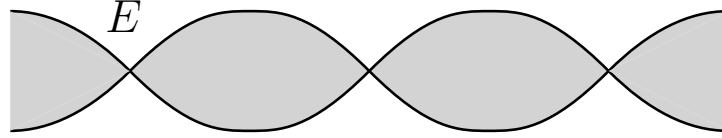
The idea is that a set of uniqueness gives rise to a positive valued continuous function λ which on the set E goes to zero so fast, that the only holomorphic function on E which is in modulus smaller than λ is the constant 0 function. Using the function λ , one can then show that a set of uniqueness can't also be a set of Carleman approximation. This shows that all three conditions from Boivin's theorem are indeed necessary.

Motivated by the work of F. Forstnerič in [4] we consider the problem of Carleman approximation by non-critical functions on open Riemann surfaces, namely under what assumptions can one require that the global approximating function has no critical points. Recall that $p \in X$ is a *critical point* of f , if the differential of f vanishes at p and f is *non-critical* if it has no critical points. In the case where $X = \mathbb{C}$, the function f is non-critical if its derivative is nowhere vanishing.

To solve this problem, we introduce the following class of subsets of an open Riemann surface X .

Definition 5. We say that a closed set $E \subseteq X$ is semi-admissible, if there exists a locally finite pairwise disjoint family of compact sets $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ and a closed set S with empty interior, such that $E = S \cup H$, where $H = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$.

To summarize, semi-admissible sets are made up of two parts; a closed set with empty interior and a union of compact sets which are nicely separated. This encodes the most important property of semi-admissible sets, namely, that there is some room between the parts of the set with non-empty interior. The name comes from the fact that semi-admissible sets are a generalization of admissible sets, which are a standard notion in the theory of complex approximation. It also turns out that semi-admissible sets always satisfy condition (iii) of Boivin's characterization. There do, however, exist sets which satisfy condition (iii), but are not semi-admissible, consider Figure 4.



Slika 4: This set is not semi-admissible, but it does satisfy condition (iii).

We will also be focusing on a particular class of functions, which is defined as follows.

Definition 6. Let $E \subseteq X$ be a semi-admissible set of the form $E = H \cup S$. Then $\tilde{\mathcal{A}}(E)$ is the class of continuous functions on E which are holomorphic on some open neighborhood of the set H .

The reason we consider functions in $\tilde{\mathcal{A}}(E)$ instead of those in $\mathcal{A}(E)$ is that they give us better control over the critical points near the boundary, since they are defined on a neighborhood of the compact sets making up E .

A function $f \in \tilde{\mathcal{A}}(E)$ is called *non-critical* if it has no critical points, where it is holomorphic. We are now able to state the main theorem.

Main Theorem. Let $E \subseteq X$ be a semi-admissible set such that $X^* \setminus E$ is connected and locally connected. Let $f \in \tilde{\mathcal{A}}(E)$ be non-critical and let $\varepsilon: E \rightarrow (0, \infty)$ be a continuous positive valued function. Then there exists a global non-critical holomorphic function $F \in \mathcal{O}(X)$ such that we have $|F(p) - f(p)| < \varepsilon(p)$ for each $p \in E$.

Since a closed set with empty interior is always semi-admissible, this is just the case where $E = S$, the following corollary is an immediate consequence of the main theorem.

Corollary 7. Let $E \subseteq X$ be a closed set with empty interior, such that $X^* \setminus E$ is connected and locally connected. Let $f \in \mathcal{C}(E)$ be a continuous complex valued function on E and let $\varepsilon: E \rightarrow (0, \infty)$ be a continuous positive valued function. Then there exists a global non-critical holomorphic function $F \in \mathcal{O}(X)$ such that we have $|F(p) - f(p)| < \varepsilon(p)$ for each $p \in E$.

Let us sketch the proof of the main theorem. A precise proof can be found in [6].

Sketch of proof. First we construct an exhaustion $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ of X by compact sets without holes such that for each $n \in \mathbb{N}_0$ and $\lambda \in \Lambda$ we have

- (i) $h(E \cup K_n) = \emptyset$
- (ii) If $H_\lambda \cap K_n \neq \emptyset$, then $H_\lambda \subseteq K_n$.

This can be achieved, since the family of compacts $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ is locally finite and pairwise disjoint. Here we also use the fact that $X^* \setminus E$ is connected and locally connected. For $n \in \mathbb{N}_0$, we define $E_n = E \cup K_n$ and note that these sets are semi-admissible and without holes. For a given sequence of positive values $\{\tilde{\varepsilon}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ we will inductively construct a sequence of functions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ such that

- (1) $f_n \in \tilde{\mathcal{A}}(E_n)$ and f_n is non-critical,
- (2) $\|f_n - f_{n-1}\|_{E_{n-1} \cap K_{n+1}} < \tilde{\varepsilon}_{n-1}$,
- (3) $f_n = f_{n-1}$ on $E \setminus K_{n+1}$.

By choosing the values $\{\tilde{\varepsilon}_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ sufficiently small, the functions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ will converge uniformly on compacts to a globally defined non-critical holomorphic function F which has the desired approximation property.

The main part of the proof lies in the induction step. So suppose we have already constructed $f_{n-1} \in \tilde{\mathcal{A}}(E_{n-1})$. We first use Mergelyan's theorem to approximate the function f_{n-1} on $E_{n-1} \cap K_{n+1}$ and obtain a globally defined

function h . Since f_{n-1} is non-critical on a neighborhood of the compacts making up E_{n-1} , we can, by approximating well enough, assume that any critical point of h which lies on $E_{n-1} \cap K_{n+1}$ lies on a part of the set with empty interior. By using flow maps of holomorphic vector fields, we can slightly perturb the function h to move all its critical points off of the set $E_{n-1} \cap K_{n+1}$ whilst not changing the function too much. The result is a global function $\tilde{h}$ which is non-critical on an open neighborhood of the set $E_{n-1} \cap K_{n+1}$. We then use a version of Runge's approximation theorem for non-critical holomorphic functions proven by F. Forstnerič in [4] to obtain a global non-critical holomorphic function g which approximates $\tilde{h}$ on $E_{n-1} \cap K_{n+1}$. To summarize, we have the following sequence of approximations

$$f_{n-1} \sim h \sim \tilde{h} \sim g$$

and we end up with a global non-critical holomorphic function g which approximates the function f_{n-1} on $E_{n-1} \cap K_{n+1}$.

Finally, we define a smooth bump function $\chi: X \rightarrow [0, 1]$ which is 1 on a neighborhood of K_n and whose support is contained in the interior of K_{n+1} . We define the function f_n by setting

$$f_n = \chi g + (1 - \chi)f_{n-1}.$$

The function f_n is continuous on E_n and holomorphic on a neighborhood of the compact sets making up E_n , since by our choice of χ the function f_n there agrees with either g or f_{n-1} . This proves $f_n \in \tilde{\mathcal{A}}(E_n)$ and all the other properties follow by construction. $\square$

As another application of the main theorem, let's construct a non-critical entire function with arbitrary asymptotic values.

Recall that $v \in \mathbb{C}$ is an *asymptotic value* of the entire function $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$, if there exists an unbounded curve $\gamma: [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ such that $\lim_{t \rightarrow 1} f(\gamma(t)) = v$. For a concrete example, consider the complex exponential $z \mapsto e^z$. If one takes γ to be the parametrization of the negative part of the real line, we get $\lim_{t \rightarrow 1} e^{\gamma(t)} = 0$, so 0 is an asymptotic value of $z \mapsto e^z$.

Using the main theorem gives us the following proposition.

Proposition 8. *Let $\{v_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ be a sequence of complex numbers. Then there exist a non-critical entire function $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ such that v_m is an asymptotic value of F for each $m \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. The proof is pretty straightforward, we just need to apply the main theorem in the right setting. For $m \in \mathbb{Z}$ let $l_m = \{x + im \mid x \geq 1\}$. Define $E = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} l_m$ and note this set is semi-admissible, has no hole and it enjoys the BEH property. Next, we define the continuous function $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ to be the constant function v_m on the line l_m . Finally, we take $\varepsilon(z) = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}$ and note it is a well defined positive valued continuous function on E . Applying the main theorem yields a non-critical entire function $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ such that for any $m \in \mathbb{Z}$ we have $|F(z) - v_m| < \varepsilon(z) = \frac{1}{\operatorname{Re}(z)}$ on l_m . By taking the limit $z \rightarrow \infty$ along l_m , this inequality implies that v_m is indeed an asymptotic value of F . $\square$

By choosing $\{v_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ to be a dense set in $\mathbb{C}$, we even have the following corollary.

Corollary 9. *Then there exist a non-critical entire function $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ such that its asymptotic values are dense in $\mathbb{C}$.*

The existence of non-critical entire functions with arbitrary asymptotic values already follows from the work of L. Boc Thaler in [1]. The benefit of the approach presented here is that we can prescribe the behavior of such a function much more explicitly.

References

- [1] Luka Boc Thaler. "Entire functions with prescribed singular values". In: International Journal of Mathematics 31.10 (2020).
- [2] André Boivin. "Carleman Approximation on Riemann Surfaces". In: Mathematische Annalen 275 (1986), pp. 57–70.
- [3] Torsten Carleman. "Sur un théorème de Weierstrass". In: Ark. Mat. Astr. Fys. 20.4 (1927), pp. 1–5.
- [4] Franc Forstnerič. "Noncritical holomorphic functions on Stein manifolds". In: Acta Mathematica 191 (Sept. 2003), pp. 143–189.
- [5] Paul M. Gauthier. "Tangential approximation by entire functions and functions holomorphic in a disc". In: Izv. Akad. Nauk Armjan. SSR Ser. Mat. 4 (1969), pp. 319–326.
- [6] Beno Učakar. Carleman approximation on Riemann surfaces without critical points. 2025. arXiv: 2508.05765 [math.CV].

You can count with poset topology

Predavatelj: Russ Woodroffe, *University of Primorska*

How many ways are there to sort the numbers $1, \dots, n$ so that the number i is not in the i -th place? How many ordered pairs from the integers are coprime? How many proper colorings are there of a graph that use only red, green, blue? I will explain how to view these and similar questions from the point of view of partially ordered sets and of topology.

Applied Mathematics in Generic Pharma Development

Predavatelj: Dejan Velušček, *Sandoz*

Sandoz, a global leader in generic pharmaceuticals and biosimilars, is deeply invested in leveraging advanced mathematical and data-driven methodologies to enhance drug development, manufacturing efficiency, and patient access. With operations spanning over 100 countries, Sandoz integrates applied mathematics across diverse domains - from predictive modelling of physico-chemical processes, optimisation in supply chains, bioinformatics, to digital twin construction. This commitment to scientific rigour and innovation supports its mission to deliver high-quality, affordable medicines worldwide, while fostering collaboration between industry and academia in the pursuit of impactful healthcare solutions.

The lecture will showcase several real-world applications of mathematical techniques - ranging from statistical analysis/modelling and machine learning to numerical methods and optimisation - within the context of generic pharmaceutical development. Case studies will illustrate how these approaches contribute to solving complex challenges such as bioequivalence assessment, similarity/sameness assessment and process optimisation. By highlighting interdisciplinary collaborations and practical outcomes, the talk aims to demonstrate the tangible impact of applied mathematics on accelerating development timelines, improving product quality, and supporting regulatory decision-making.

Predstavitev tabora MaRS in njegove zgodovine

Predavatelj: Nejc Zajc, *Magistrski študent Fakultete za matematiko in fiziko, Univerze v Ljubljani*

Matematično raziskovalno srečanje (MaRS) je poletni matematični tabor za srednješolke in srednješolce, ki združuje bogat strokovni in pester družabni program. V letošnjem letu smo izvedli jubilejni dvajseti MaRS zapored. Na konferenci bomo predstavili program našega tabora in se dotaknili njegove bogate zgodovine.

Urniki tabora je vsako leto zelo pester. Strokovni del tabora je razdeljen na tri sklope. V osrednji delavnici udeleženci poglobljeno spoznajo izbrano matematično temo. Na večernih predavanjih gostje tabora predstavijo krajše, a zanimive matematične vsebine. Osrednja dejavnost pa je delo na projektih, kjer skupine treh udeležencev pod mentorstvom člana organizacijske ekipe raziskujejo pripravljen matematični problem. Reševanje nalog, preučevanje matematičnega ozadja in priprava končnega članka potekajo cel teden. Družabni del tabora ponuja številne priložnosti za sproščeno druženje in zabavo. Udeleženci na igriv način preizkusijo svoje spretnosti, ob večerih pa druženje ob družabnih igrah v skupnih prostorih pogosto traja pozno v noč. Tabor tradicionalno zaključimo z Veliko MaRSovsko pustolovščino - orientacijskim pohodom po naravi v okolici doma, na katerem udeleženci rešujejo zabavne, spretnostne in miselne naloge. Pustolovščini sledita piknik in sproščeno druženje do jutranjih ur zadnjega dneva tabora.

V zgodovini našega tabora se je v organizacijski ekipi zamenjalo že več kot 60 članov, med udeleženci pa smo imeli več sto dijakinj in dijakov iz cele Slovenije. Predstavili bomo vodje tabora skozi leta in člane več posadk. Spomnili se bomo mnogih nepozabnih in lepih trenutkov, ki smo jih doživeli na taboru.

Izzivi učenja in poučevanja matematike –včeraj, danes, jutri

Predavateljica: Amalija Žakelj, *Univerza na Primorskem, Pedagoška fakulteta*

Didaktika matematike je znanost, ki si prizadeva metodično priti do sistematično izpeljanih, urejenih in dokazljivih spoznanj na področju učenja in poučevanja matematike.

Izhajajoč iz številnih izsledkov nacionalnih in mednarodnih raziskav učenja in poučevanja matematike, ob upoštevanju tehnološkega napredka, razvoja izobraževalne tehnologije, se vedno znova zastavlja vprašanje, kakšen naj bo proces izobraževanja, zlasti proces izobraževanja matematike, da bo čim bolj kakovostno prispeval k razvoju matematike in posameznika.

V prvem delu prispevka obravnavamo učenje in poučevanje matematike skozi zgodovino in predstavimo teorije učenja in poučevanja (matematike). V 20. stoletju so se na osnovi teoretičnih izhodišč kognitivne in konstruktivistične teorije poučevanja in učenja uvedle pomembne novosti in zelo spremenile pouk matematike: Brunerjev model usvajanja matematičnih pojmov; taksonomije matematičnih vsebin po Gagneju; raziskovalni in problem-ski pouk idr. Na podlagi teh spoznanj se je sredi 20. stoletja v kurikularnih dokumentih začel pojavljati pojem matematične pismenosti kot analogija bralne pismenosti. Ena pomembnejših zahtev matematične pismenosti v 21. stoletju pa je zmožnost matematičnega modeliranja ter uporaba izobraževalne tehnologije.

V povezavi z omenjenimi poudarki razvoja pouka matematike v drugem delu prispevka predstavljamo rezultate empirične raziskave, katere cilj je bil na izbrani temi iz aritmetike raziskati (1) dosežke učencev pri osnovnem in konceptualnem, proceduralnem in problemskem znanju in (2) ali dosežki na posamezni kognitivni ravni napovedujejo dosežke na drugi kognitivni ravni. Izpostavljamo dosežke in nevrvalgične točke učencev pri vseh treh kognitivnih ravneh in posebej pri reševanju besedilnih matematičnih problemov (BMP). Pri kvantitativni in kvalitativni analizi dosežkov pri BMP smo se usmerili na tri faze: prevajanje besedila v matematični zapis, izvajanje postopka ter oblikovanje in utemeljevanje odgovora. Pri tem se navežemo na izsledke predhodnih raziskav, ki povezujejo bralno in matematično pismenost.