IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2009
Letnik 56
3

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 56 • ŠT. 3 • STR. 81–120 • MAJ 2009

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAJ 2009, letnik 56, številka 3, strani 81–120

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** `Zaloznistvo@dmfa.si` **Internet:** `http://www.obzornik.si/` **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancirata jo Javna agencija za knjigo Republike Slovenije ter Ministrstvo za šolstvo in šport.

Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

TSCHIRNHAUSOVA KUBIKA

MARKO RAZPET

Pedagoška fakulteta
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2000): 14H45, 14H50

Tschirnhausovo kubiko bomo definirali kot katakavstiko parabole glede na žarke, ki padajo pravokotno na njeno geometrijsko os, in kot negativno nožiščno krivuljo parabole glede na njeno gorišče. Krivuljo bomo zapisali v parametrični in polarni obliki in navedli nekatere njene lastnosti.

THE TSCHIRNHAUS CUBIC

The Tschirnhaus cubic is defined as the catacaustic of the parabola with respect to the rays falling on its axis perpendicularly, and as the negative pedal curve of the parabola with respect to its focus. The equation of the cubic is written in parametric and polar form and some properties of the curve are explained.

Ehrenfried Walther von Tschirnhaus (1651–1708), vsestranski nemški znanstvenik (kemik, didaktik, matematik, mineralog, filozof, fizik, tehnik, vulkanolog, zdravilec), izumitelj evropskega porcelana, je leta 1682 začel študirati tako imenovane *kavstične krivulje* ali *kavstike*, ki so ogrinjače (ovojnice ali envelope) odbitih ali lomljenih žarkov na dani ravninski krivulji. Svoje rezultate o teh krivuljah je objavil v letih 1682 in 1690.[1]

Ukvarjal se je tudi z ekstremalnimi problemi in teorijo enačb. Leta 1683 je objavil prispevek, v katerem pokaže, kako lahko s primerno transformacijo v polinomu odpravimo nekaj členov. Transformacija se imenuje po avtorju *Tschirnhausova transformacija*. V letih 1669–1676 se je mudil v Holandiji, Angliji in Franciji, kjer se je seznanil z nekaterimi pomembnimi znanstveniki tistega obdobja, na primer s Chr. Huygensom, J. Wallisom, I. Newtonom in G. W. Leibnizem. To je bilo ravno v času nastajanja infinitezimalnega računa in gradenj optičnih inštrumentov, pri katerih sta pomembna odboj in lom svetlobe ter s tem v zvezi že omenjene kavstike. V letih 1684 in 1686 (glej [3]) je Leibniz objavil prvi deli o infinitezimalnem računu, Newton pa nekaj malega v svojih Principih leta 1687 in več kasneje. Nato pa je prišlo do znanega spora med Newtonom in Leibnizem glede primata v infinitezimalnem računu, kajti Newton je glavne ideje o njem imel že pred letom 1684,

[1] Družinsko ime *Tschirnhaus* se v matematični literaturi pogosto pojavlja tudi kot *Tschirnhausen*, kar je po obliki starinski dajalnik prvega, ki ga zahteva predlog *von*.

a jih ni objavil. Tschirnhaus je leta 1675 dobil neki prepis Newtonovega rokopisa, in to ravno v času, ko je skupaj z Leibnizem delal v Parizu. Zato v zvezi s tem sporom pogosto omenjajo tudi Tschirnhausa.

V nadaljevanju bomo predpostavili, da imajo vse obravnavane krivulje v vsaki točki enolično določeno tangento razen morda v končno mnogo točkah.

Naj bo $\mathcal{K}$ ravninska krivulja, ki jo vzamemo za idealno zrcalo, na katero padajo vzporedni žarki ali pa žarki iz izbrane točke v ravnini krivulje. Odbiti žarki, podaljšani v premice, sestavljajo družino premic. Če obstaja ogrinjača $\mathcal{K}'$ teh premic, jo imenujemo *katakavstika* krivulje $\mathcal{K}$ glede na dane vpadajoče žarke. Analogno je *diakavstika* krivulje $\mathcal{K}$ ogrinjača na tej krivulji lomljenih žarkov, podaljšanih v premice. Izraza katakavstika in diakavstika je prvi uporabljal Jakob Bernoulli (1654–1705) leta 1693.

Od kod besede *kavstika*, *katakavstika* in *diakavstika*? Najprej so jih uporabljali v optiki. Sferična zrcala in leče namreč vzporednih žarkov ne zbirajo točno v eni točki, gorišču, ampak odbiti oziroma lomljeni žarki ogrinjajo neko ploskev, ki so ji dali ime *kavstika*, kar je grškega izvora. V grščini izraža beseda *kaustikos* nekaj, kar je v zvezi z ognjem in gorenjem, na primer *vrel* ali *ognjen*. Zloglasna beseda *holokavst* je istega izvora. Z dodajanjem grških besedic *kata*, kar pomeni med drugim *spodaj*, *dol* ali *nasproti*, in *dia*, kar pomeni med drugim *prek* ali *skozi*, sta nastali besedi katakavstika in diakavstika.[2] V ravninski geometriji delamo glede tega podobno. Študiramo odboje in lome svetlobnih žarkov na ravninski krivulji.

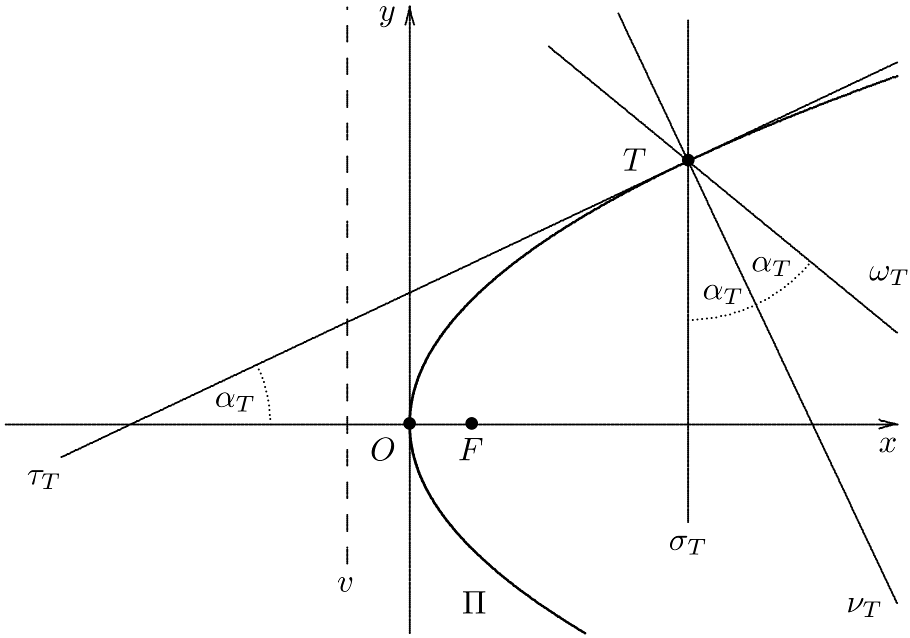
Poiskali bomo katakavstiko parabole glede na žarke, ki nanjo vpadajo pravokotno na njeno geometrijsko os. Žarki, ki padajo na parabolo vzporedno z njeno osjo, se odbijajo skozi gorišče in po drugem odboju potekajo spet vzporedno z osjo. Drugi tipi na parabolo vpadajočih žarkov dajo zapletene katakavstike. S pridom uporabljamo odbojne lastnosti parabole na primer pri avtomobilskih žarometih. Spomnimo se na dolge in kratke luči, kjer s preklapljanjem prestavljamo svetlobni vir iz gorišča nekoliko vstran.

Vzemimo parabolo Π, ki jo določata gorišče F in vodnica v, in na njej točko T, v kateri konstruiramo tangento τ_T in normalo ν_T. Naj bo σ_T pravokotnica skozi točko T na os parabole in naj bo ω_T zrcalna slika σ_T glede na normalo ν_T. Zanima nas, kaj je ogrinjača družine $\{\omega_T \colon T \in \Pi\}$.

Za udobno računanje vzemimo parabolo Π v pravokotnem kartezičnem

[2]Katakavstiko lahko opazujemo ob primerni svetlobi v kavni skodelici. Odbiti žarki se ne zbirajo v eni točki, v gorišču, ampak vidno oblikujejo krivuljo, ki bi ji lahko rekli *goriščnica*. V bistvu vidimo ravninski presek prave prostorske katakavstike.

koordinatnem sistemu xy tako, da je njeno teme v koordinatnem izhodišču O, njena os sovpada z osjo x, gorišče F pa leži na pozitivnem delu osi x. Kot je znano, ima parabola Π potem enačbo $y^2 = 2px$, kjer je p parameter parabole, to je razdalja gorišča F od vodnice v ali pa ordinata točke parabole nad goriščem.



Slika 1. Odboj na paraboli

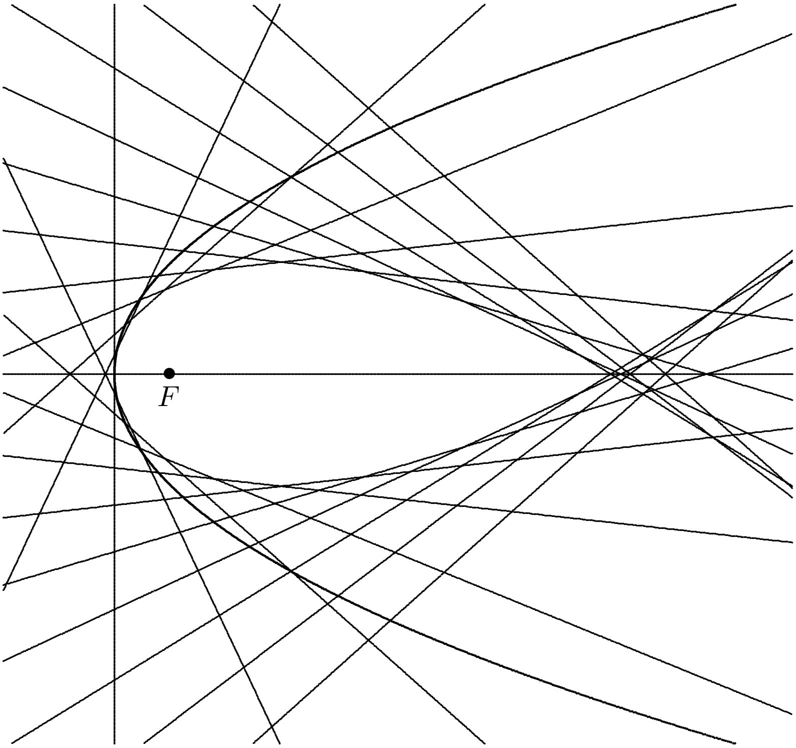
Za točko T označimo ordinato s t. Potem je njena abscisa $t^2/(2p)$ in s tem imamo parametrizacijo parabole Π:

$$x = \frac{t^2}{2p}, \quad y = t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Naklonski kot tangente τ_T označimo z α_T. Osnovna geometrijska interpretacija odvoda pove:

$$\operatorname{tg} \alpha_T = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{p}{t}. \tag{2}$$

Premici σ_T in ν_T se sekata pod kotom α_T, prav tako premici ν_T in ω_T. Zato se premici σ_T in ω_T sekata pod kotom $2\alpha_T$, premica ω_T pa ima naklonski kot $2\alpha_T + \pi/2$ in s tem smerni koeficient $k_T = \operatorname{tg}(2\alpha_T + \pi/2) =$



Slika 2. Družina odbitih premic

$-\operatorname{ctg}(2\alpha_T)$. Enačba premice ω_T je seveda

$$y - t = k_T\left(x - \frac{t^2}{2p}\right) = -\operatorname{ctg}(2\alpha_T)\left(x - \frac{t^2}{2p}\right). \tag{3}$$

Z uporabo rezultata (2) lahko hitro izračunamo

$$\operatorname{ctg}(2\alpha_T) = \frac{t^2 - p^2}{2pt} \tag{4}$$

in nato izrazimo enačbo premice ω_T iz (3):

$$2p(t^2 - p^2)x + 4p^2ty = 3p^2t^2 + t^4. \tag{5}$$

To je enoparametrična družina premic ω_T. Vemo pa (glej na primer [4]), da se ogrinjačo enoparametrične družine krivulj $F(x, y, t) = 0$ dobi z izločitvijo parametra t iz sistema enačb

$$F(x, y, t) = 0\,, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(x, y, t) = 0\,. \tag{6}$$

Če pa nam zgornji sistem enačb uspe razrešiti na x in y, dobimo ogrinjačo v parametrični obliki. V našem primeru gre to gladko. Najprej z odvajanjem na parameter t dobimo iz (5) sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2p(t^2 - p^2)x + 4p^2ty &= 3p^2t^2 + t^4, \\ 2ptx + 2p^2y &= 3p^2t + 2t^3. \end{aligned} \tag{7}$$

Sistem se da lepo rešiti po Cramerjevem pravilu in s tem imamo iskano krivuljo v parametrični obliki:

$$x = \frac{3t^2}{2p}, \quad y = \frac{t(3p^2 - t^2)}{2p^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Z izločitvijo parametra t iz zgornjih enačb dobimo

$$54py^2 = x(9p - 2x)^2. \tag{9}$$

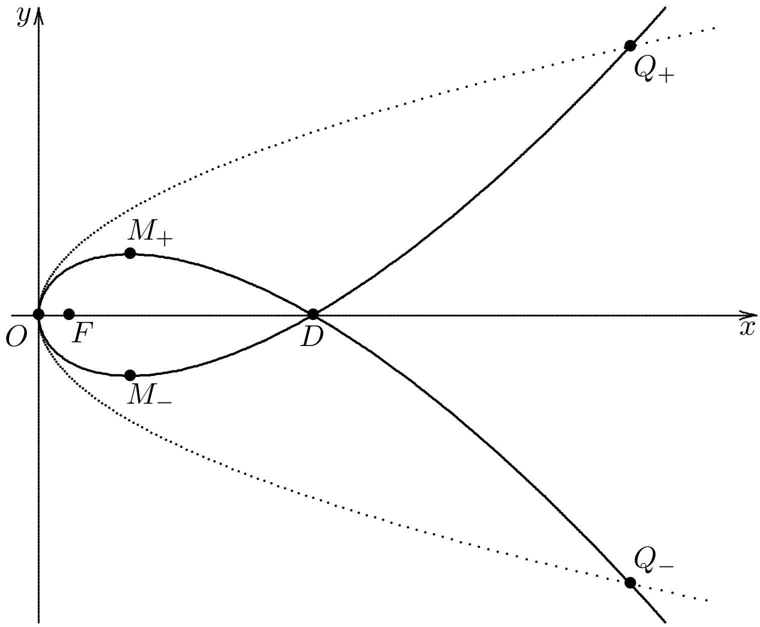
To je enačba iskane krivulje v implicitni obliki. Krivulja je kubična in jo imenujemo *Tschirnhausova kubika*. Ime je vpeljal leta 1900 kanadski matematik R. C. Archibald (1875–1955), ko je klasificiral kubične krivulje. Tschirnhausova kubika je torej katakavstika parabole glede na žarke, ki vpadajo pravokotno na os parabole. V zgodovini matematike je Tschirnhausova kubika ena prvih krivulj, ki je bila dobljena kot ogrinjača družine premic.

S tem ko dani krivulji $\mathcal{K}$ poiščemo katakavstiko $\mathcal{K}'$, transformiramo krivuljo $\mathcal{K}$ v novo krivuljo $\mathcal{K}'$. Ni pa to edini način. Poleg običajnih transformacij, kot sta razteg in zrcaljenje na krožnici, nove krivulje pridobivamo tudi na primer z evolutami in evolventami dane krivulje in z drugimi postopki (glej na primer [2]). Eden preprostejših postopkov je poiskati dani krivulji tako imenovano *nožiščno ali pedalno krivuljo* glede na dano točko N. Z obratnim postopkom pa krivulji poiščemo *negativno nožiščno ali negativno pedalno krivuljo* glede na dano točko N.

Nožiščna krivulja ravninske krivulje $\mathcal{K}$ glede na točko N v ravnini te krivulje je množica $\mathcal{K}^*$ pravokotnih projekcij (nožišč) N^* točke N na tangente τ_T krivulje $\mathcal{K}$, ko dotikališče T teče po $\mathcal{K}$. Obratno pa je $\mathcal{K}$ negativna nožiščna krivulja za $\mathcal{K}^*$ glede na točko N.

Očitno je negativna nožiščna krivulja za krivuljo $\mathcal{K}^*$ glede na točko N ogrinjača družine pravokotnic v točki N^* krivulje $\mathcal{K}^*$ na premice skozi N in N^*, pri čemer $N^* \neq N$ teče po krivulji $\mathcal{K}^*$.

Dokažimo, da je Tschirnhausova krivulja tudi negativna nožiščna krivulja parabole glede na njeno gorišče F. To lahko naredimo z metodo elementarne geometrije, pri čemer upoštevamo lastnost parabole, ki pove, da njena



Slika 3. Tschirnhausova kubika

tangenta v katerikoli točki T razpolavlja kot med premico skozi T in F ter pravokotnico skozi T na vodnico parabole, ali pa popolnoma računsko.

Parabola Π naj bo postavljena v koordinatni sistem tako kot doslej. Smerni koeficient premice skozi točki $F(p/2, 0)$ in $T(t^2/(2p), t) \in \Pi$ je

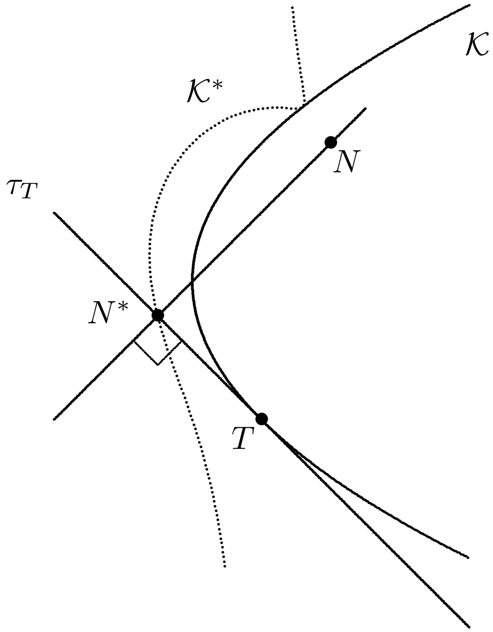
$$k = \frac{2pt}{t^2 - p^2}\,. \tag{10}$$

Zato je enačba pravokotnice skozi T na to premico:

$$y - t = -\frac{t^2 - p^2}{2pt}\left(x - \frac{t^2}{2p}\right). \tag{11}$$

S preureditvijo pa spet dobimo ravno enačbo (5) in za ogrinjačo družine takih premic Tschirnhausovo kubiko.

Lastnosti Tschirnhausove kubike lahko poiščemo iz njene parametrične oblike (8) ali implicitne oblike (9). Najprej je očitno, da je os x njena simetrala, ki jo preseka v točki $D(9p/2, 0)$, ki je edina dvojna točka Tschirnhausove kubike. Ko se parameter t spreminja od zelo velikih negativnih proti zelo velikim pozitivnim vrednostim, teče ustrezna točka po Tschirnhausovi kubiki iz zelo oddaljene točke prvega kvadranta in preseka parabolo



Slika 4. Nastanek nožiščne krivulje $\mathcal{K}^*$ iz dane krivulje $\mathcal{K}$ glede na točko N

v točki Q_+, preseka abscisno os v točki D, se spusti v točko M_-, kjer ima na zanki najmanjšo ordinato, nato doseže teme O, potem se dvigne v točko M_+, kjer ima na zanki največjo ordinato, nato pa se spušča proti dvojni točki D in zopet seka parabolo, tokrat v točki Q_-, nato nadaljuje pot proti zelo oddaljenim točkam četrtega kvadranta.

Brez težav izračunamo koordinate pomembnih točk in za kateri parameter t jih dobimo:

$$O(0,0)\,, \quad t = 0\,;$$

$$M_+(3p/2, p)\,, \quad t = p\,;$$

$$M_-(3p/2, -p)\,, \quad t = -p\,;$$

$$Q_+\Big(p(9/2 + 3\sqrt{3}), p\sqrt{9 + 6\sqrt{3}}\Big)\,, \quad t = -p\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}\,;$$

$$Q_-\Big(p(9/2 + 3\sqrt{3}), -p\sqrt{9 + 6\sqrt{3}}\Big)\,, \quad t = p\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}\,;$$

$$D(9p/2, 0)\,, \quad t = \pm p\sqrt{3}\,.$$

Izračunajmo kot, pod katerim Tschirnhausova kubika seka sama sebe. Iz (4) ali pa iz (8) najdemo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p^2 - t^2}{2pt}\,. \tag{12}$$

Smerna koeficienta $k_{\pm}$ tangent na Tschirnhausovo kubiko v točki D izračunamo iz (12) za $t = \mp p\sqrt{3}$ in dobimo $k_{\pm} = \pm\sqrt{3}/3$. To pomeni, da Tschirnhausova kubika seka sama sebe pod kotom $\pi/3$, in to neodvisno od parametra p, torej od oblike parabole Π.

V točki Q_+ je strmina parabole enaka $1/\sqrt{9+6\sqrt{3}}$, strmina Tschirnhausove kubike pa $(1+\sqrt{3})/\sqrt{3+2\sqrt{3}}$. Kot β, ki ga oklepata parabola in Tschirnhausova kubika v točkah Q_+ in Q_-, ima za tangens število $\sqrt{2\sqrt{3}-3}$, iz česar dobimo približno $\beta = 34^\circ 16'$, prav tako neodvisno od parametra p.

Iz parametrične oblike (8) Tschirnhausove kubike brez težav izrazimo ločno dolžino s, ploščino S zanke, prostornino V in površino P vrtenine, ki nastane z rotacijo zanke za kot 2π okoli njene simetrale. Dobimo

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = \frac{9}{4p^4}\left(p^2+t^2\right)^2 dt^2. \tag{13}$$

Ločna dolžina Tschirnhausove kubike od temena O do točke T, ki ustreza parametru $t > 0$, je:

$$s(t) = \frac{3}{2p^2}\int_0^t (p^2+\tau^2)\,d\tau = \frac{t}{2p^2}(3p^2+t^2)\,. \tag{14}$$

Iz (9) izračunamo:

$$S = \frac{2}{\sqrt{54p}}\int_0^{9p/2}(9p-2x)\sqrt{x}\,dx = \frac{18p^2\sqrt{3}}{5}\,. \tag{15}$$

Za prostornino V dobimo

$$V = \frac{\pi}{54p}\int_0^{9p/2} x(9p-2x)^2\,dx = \frac{81\pi p^3}{32}\,, \tag{16}$$

površino pa lahko izrazimo v obliki

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{54p}}\int_0^{9p/2}(9p-2x)\sqrt{x}\,ds\,, \tag{17}$$

kjer najprej iz (13) izračunamo

$$ds^2 = \frac{3}{8p^3}\left(p^2 + \frac{2px}{3}\right)^2 \frac{dx^2}{x} \tag{18}$$

in nazadnje dobimo integral

$$P = \frac{\pi}{6p^2} \int_0^{9p/2} (9p - 2x)\left(p^2 + \frac{2px}{3}\right) dx = \frac{27\pi p^2}{4}\,. \tag{19}$$

Za ukrivljenost κ in krivinski polmer $\varrho = 1/\kappa$ Tschirnhausove kubike tudi najdemo preprosta izraza. Uporabimo splošno formulo

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \tag{20}$$

in iz (8) imamo hitro:

$$\kappa = \frac{4p^3}{3\left(p^2 + t^2\right)^2}\,, \quad \varrho = \frac{3\left(p^2 + t^2\right)^2}{4p^3}\,. \tag{21}$$

V posebnih primerih je v točkah O, M, D, Q_-, Q_+:

$$\varrho(O) = \frac{3p}{4}\,, \quad \varrho(M) = 3p\,, \quad \varrho(D) = 12p\,, \quad \varrho(Q_-) = \varrho(Q_+) = 3p(7+4\sqrt{3})\,.$$

Tschirnhausova kubika ima preprosto enačbo v polarnih koordinatah. Da bi jo izpeljali, postavimo koordinatno izhodišče v gorišče F parabole Π. Parabola Π s parametrom p ima v polarnih koordinatah enačbo

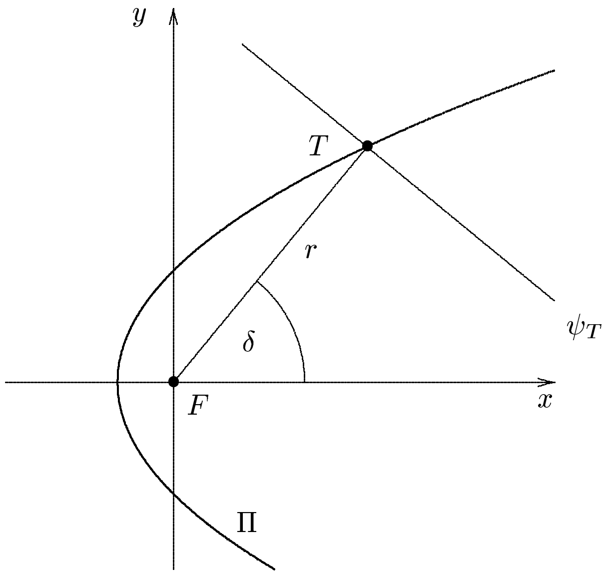
$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}\,. \tag{22}$$

Hessejeva ali normalna enačba premice ψ_T, ki je pravokotna na radij r parabole v točki T, ki jo določa kot δ, je

$$x\cos\delta + y\sin\delta = \frac{p}{1 - \cos\delta}\,. \tag{23}$$

Ko δ teče po množici $(-\pi, 0) \cup (0, \pi]$, dobimo družino premic $\{\psi_T \colon T \in \Pi\}$ in s splošnim principom, z odvajanjem (23) na parameter δ, dobimo sistem enačb za iskano ogrinjačo:

$$\begin{aligned} x\cos\delta + y\sin\delta &= \frac{p}{1 - \cos\delta}\,, \\ -x\sin\delta + y\cos\delta &= -\frac{p\sin\delta}{(1 - \cos\delta)^2}\,. \end{aligned} \tag{24}$$



Slika 5. Parabola in polarne koordinate

Sistem ima eno samo rešitev:

$$x = \frac{p(\cos\delta - \cos(2\delta))}{(1-\cos\delta)^2}\,, \quad y = \frac{p(\sin\delta - \sin(2\delta))}{(1-\cos\delta)^2}\,. \tag{25}$$

Po faktorizaciji trigonometričnih izrazov lahko zapišemo:

$$x = \frac{p\sin(3\delta/2)}{2\sin^3(\delta/2)}\,, \quad y = -\frac{p\cos(3\delta/2)}{2\sin^3(\delta/2)}\,. \tag{26}$$

Dobljeni enačbi predstavljata drugo parametrično obliko Tschirnhausove kubike. Sedaj uvedemo polarni koordinati r in φ, tako da bo veljalo $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Najprej imamo:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{p^2}{4\sin^6(\delta/2)}\,, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}(3\delta/2 + \pi/2)\,. \tag{27}$$

Veljati mora relacija $2\varphi = 3\delta + \pi + 2k\pi$, kjer je k celo število. Izberimo $k = -1$, tako da velja $2\varphi = 3\delta - \pi$ oziroma $\delta = (2\varphi + \pi)/3$. S tem imamo

$$r^2 = \frac{p^2}{4\sin^6(\varphi/3 + \pi/6)} = \frac{p^2}{4\cos^6(\varphi/3 - \pi/3)}\,. \tag{28}$$

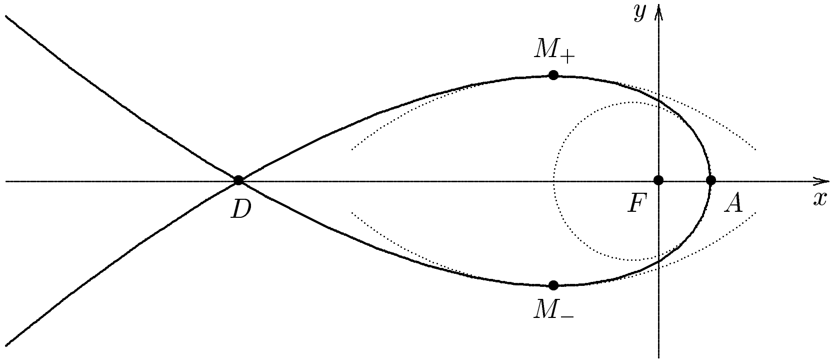
Enačba Tschirnhausove kubike v polarni obliki je torej

$$r = \frac{p}{2\cos^3(\varphi/3 - \pi/3)}\,. \tag{29}$$

Za enkratni sprehod po Tschirnhausovi kubiki vzamemo $-\pi/2 < \varphi < 5\pi/2$. Z zamenjavo $\varphi \to \pi + \varphi$, kar pomeni zasuk krivulje okoli pola za kot π, dobimo še enostavnejšo obliko

$$r = \frac{p}{2\cos^3(\varphi/3)}\,. \tag{30}$$

Za enkratni sprehod po krivulji pa tedaj vzamemo $-3\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$.



Slika 6. Tschirnhausova kubika po enačbi (30) s krivinskimi krožnimi loki

Iz že znanih rezultatov lahko zapišemo koordinate važnih točk na krivulji:

$$A(p/2, 0)\,, \quad D(-4p, 0)\,, \quad M_+(-p, p)\,, \quad M_-(-p, -p)\,.$$

Točkama $M_\pm$ ustrezata polarna kota $\varphi = \pm 3\pi/4$ in polarni radij $r = p\sqrt{2}$.

Tschirnhausovo kubiko imenujemo tudi *Catalanova trisektrisa*, ker lahko z njeno pomočjo razdelimo kot na tri enake dele. Z njo se je namreč ukvarjal tudi E. Ch. Catalan (1814–1894). Če sta namreč φ in r polarni kot in polarni radij točke T na Tschirnhausovi kubiki (30), potem iz enakosti

$$\cos\varphi = 4\cos^3(\varphi/3) - 3\cos(\varphi/3) \tag{31}$$

sledi relacija

$$\cos\varphi = \frac{2p}{r} - 3\cos(\varphi/3)\,, \tag{32}$$

iz katere je

$$\cos(\varphi/3) = \frac{2p - r\cos\varphi}{3r} = \frac{2p - x}{3r}\,. \tag{33}$$

Pri tem je $x = r\cos\varphi$ abscisa točke T. Očitno lahko konstruiramo kot $\varphi/3$ s pomočjo pravokotnega trikotnika, ki ima hipotenuzo $3r$ in eno kateto $2p-x$. Tschirnhausova kubika je le ena od trisektris. Precej znana je tudi *Maclaurinova trisektrisa*, ki ima v polarnih koordinatah enačbo $r = a/\cos(\varphi/3)$, kjer je a pozitivna konstanta. Še nekaj pa jih najdemo na primer v [1, 2].

Nekateri imenujejo Tschirnhausovo kubiko tudi *L'Hôpitalova kubika*, ker se je z njo ukvarjal tudi matematik markiz G. F. A. de L'Hôpital (1661–1704) in rezultate objavil leta 1696, kasneje kot Tschirnhaus. Zato je popolnoma umestno, da so krivuljo, malo pozno sicer, poimenovali po slednjem.

LITERATURA

[1] E. H. Lockwood, *A book of curves*, Cambridge University Press, 1963.

[2] A. A. Savelov, *Ravninske krivulje*, Školska knjiga, Zagreb 1979.

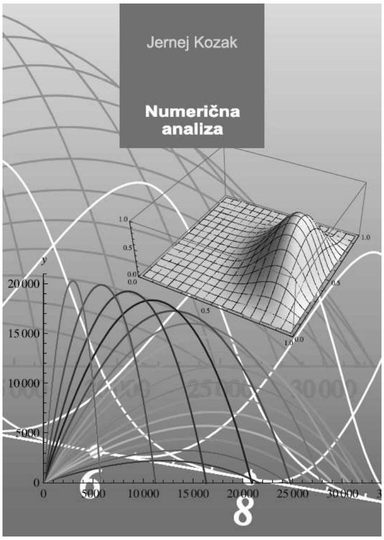
[3] D. J. Struik, *Kratka zgodovina matematike*, Knjižnica Sigma 27, DMFA, Ljubljana 1986.

[4] I. Vidav, *Višja matematika I*, DMFA–založništvo, Ljubljana 2008.

NOVE KNJIGE

Jernej Kozak: NUMERIČNA ANALIZA, Matematika – fizika 44, DMFA–založništvo, Ljubljana 2008, 420 strani.

Slovenska matematična literatura je bogatejša za novo delo z zgornjim naslovom. Knjiga je izšla v zbirki *Matematika – fizika*, ki je zbirka univerzitetnih učbenikov in monografij. Delo spada v to zbirko, ker je prav to: univerzitetni učbenik in monografija. Izdajatelja sta Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani in Društvo matematikov, fizikov in astronomov – založništvo. Slovensko numerično literaturo je to delo dopolnilo na področju numerične analize, ki v ožjem smislu vsebuje poglavja: interpolacijo, aproksimacijo, numerično odvajanje in integriranje ter numerično reševanje navadnih in parcialnih diferencialnih enačb. Ta poglavja so bila sicer že na kratko obravnavana v prvem slovenskem učbeniku iz nume-



rične matematike (Z. Bohte, *Numerične metode*, DZS, Ljubljana 1978), vendar na zelo elementarnem nivoju. Pozneje so izšli v slovenskem jeziku še trije popolnejši učbeniki iz numerične matematike, ki pokrivajo numerično linearno algebro in nelinearne enačbe: Z. Bohte, *Numerično reševanje nelinearnih enačb* (DMFA Slovenije, Ljubljana 1993), Z. Bohte, *Numerično reševanje sistemov linearnih enačb* (DMFA Slovenije, Ljubljana 1994) in J. W. Demmel, *Applied numerical linear algebra* (SIAM, Philadelphia 1997) v slovenskem prevodu E. Zakrajška, *Uporabna numerična linearna algebra*, DMFA Slovenije, Ljubljana 2000). O razvoju numerične matematike na Oddelku za matematiko FMF je bilo v Obzorniku že poročano (OMF **54** (2007) 2, str. 57–62).

Najprej na kratko predstavimo avtorja nove knjige. Jernej Kozak se je rodil v Ljubljani leta 1946. Matematiko je študiral v Ljubljani, kjer je diplomiral in leta 1978 tudi doktoriral. Potem se je izpopolnjeval v ZDA pri znamenitem matematiku Carlu de Booru. Zdaj je redni profesor na Oddelku za matematiko Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Predava razne numerične in računalniške predmete, znanstveno pa se ukvarja predvsem z interpolacijo in aproksimacijo funkcij, z zlepki v eni in več dimenzijah, z geometrijsko interpolacijo krivulj in ploskev s polinomi in zlepki. Poudarek pri zadnjih raziskavah je predvsem na težkih problemih v več dimenzijah. Kozak je napisal že tri učbenike s področja računalništva in je avtor ali soavtor petdesetih znanstvenih in strokovnih člankov, ki so pogosto citirani v mednarodnih revijah. Avtor je zelo uspešen mentor mladim. Pri njem je diplomiralo 105 uporabnih matematikov, magistriralo 8 mladih raziskovalcev in trije so že doktorirali. Njegova raziskovalna skupina šteje 5 članov. Pohvalijo se lahko s številnimi znanstvenimi članki v zelo uglednih mednarodnih revijah. Trije doktorandi so si že pridobili učiteljski naziv.

Nova knjiga *Numerična analiza* je primeren učbenik za predmete, ki jih avtor predava na drugi in tretji stopnji študija uporabne matematike na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Ker pa po vsebini in zahtevnosti močno prekaša programe teh predmetov, je knjiga monografija z edinstvenim pristopom do problemov numerične analize in z vso potrebno matematično strogostjo. Ne nazadnje je monografija lep primer, kako se v matematiki prepletajo in dopolnjujejo posamezna področja, kako npr. poznavanje funkcionalne analize s pridom uporabimo v numerični analizi in kako pomembne so metode numerične linearne algebre v drugih poglavjih numerične analize.

Knjiga *Numerična analiza* obsega skupaj s kazalom, predgovorom, literaturo in stvarnim kazalom štiri dele z osmimi poglavji na 420 straneh. Tekst ilustrirajo številni primeri, 87 slik in 43 tabel. Pri vseh poglavjih so dodane naloge, ki pretežno dopolnjujejo obravnavano snov in so praviloma zelo zahtevne. Razlagi posameznih numeričnih primerov so dodani večbarvni diagrami, ki zelo olajšajo razumevanje snovi. Posebnost tega dela je avtorjevo stališče, da je osnova numerične analize abstraktna aproksimacija, zato najprej pripravi potrebno teorijo, ki jo v naslednjih poglavjih dosledno uporablja. Zaradi tega se je treba pri razumevanju novih spoznanj pogosto sklicevati na pripravljeno osnovo. Nekatere izpeljave so dolge in zahtevne, kar zahteva od bralca aktivno sodelovanje. Podrobna razlaga posameznih korakov pa bi seveda zelo povečala obseg že tako obsežnega dela. Zelo pohvalno je Kozakovo dosledno obravnavanje napak, ki so neogibne pri numeričnem reševanju problemov. Dodajmo še, da je delo napisano v lepem, a tudi izvirnem jeziku. Kot se pričakuje od matematičnega teksta, je delo napisano zelo skrbno, brez nepotrebnih spodrsljajev.

Zdaj pa na kratko opišimo vsebino dela. V prvem delu Aproksimacija in interpolacija postavi avtor najprej temelje abstraktne aproksimacije, tj. aproksimacije elementa abstraktnega linearnega prostora z elementi izbranega podprostora. Pri tem je zelo pomembna izbira baze v prostoru, zato avtor navede nekaj baz, ki jih pogosto uporabljamo, in analizira njihove lastnosti. Podrobno obdela osnovni problem eksistence in enoličnosti elementa najboljše aproksimacije. Posebej obravnava enakomerno aproksimacijo in aproksimacijo po metodi najmanjših kvadratov. Tudi v poglavju o interpolaciji avtor najprej formulira problem abstraktno, nato pa obdela konkretne primere. Tako obravnava polinomsko interpolacijo, iterativno interpolacijo in interpolacijo z raznimi tipi zlepkov: z odsekoma linearnimi zlepki, kubičnimi zlepki in B-zlepki.

Drugi del knjige je posvečen numeričnemu odvajanju in integriranju. Najprej je na kratko omenjeno računanje odvodov funkcije, ki je podana z vrednostmi v posameznih točkah. Tu avtor s pridom uporablja interpolacijo z zlepki, ki jo je pripravil v prvem delu. Nato pa izpelje vrsto formul za numerično odvajanje v zaključeni obliki, ki se uporabljajo pri numeričnem reševanju diferencialnih enačb. Pri poglavju o numeričnem integriranju avtor obravnava konvergenco splošnih integracijskih pravil. Obširno obdela osnovna in sestavljena Newton-Cotesova integracijska pravila s strogo obravnavo napak. Posebej obravnava tudi zelo učinkovito Rombergovo metodo. Pomemben poudarek daje avtor integracijskim pravilom Gaussovega tipa in računanju singularnih integralov ter integralov na neomejenem intervalu. Računanju večkratnih integralov pa se je avtor odpovedal zaradi že tako povečanega obsega dela.

Tretji del knjige obravnava numerično reševanje navadnih diferencialnih enačb. Avtor se najprej loti reševanja sistemov enačb prvega reda. Pri tem dosledno uporablja vektorsko obliko zapisa enačb in metod. Za razlago potrebne teorije uporabi nekaj preprostih metod, ki so zasnovane na formulah prejšnjega poglavja. Definira lokalno in globalno napako in strogo obravnava konvergenco metode. Podrobneje obdela enočlenske metode tipa Runge-Kutta in linearne veččlenske metode. Pri zadnjih se loti povezave pojmov stabilnosti, konsistence in konvergence. Dodatno se dotakne začetnih problemov pri enačbah višjih redov. Veliko pozornost je Kozak posvetil robnim problemom pri navadnih diferencialnih enačbah. Obravnava prevedbo robnih problemov na začetne in reševanje z diferenčno metodo. Tudi kolokacije se bežno dotakne, prav tako variacijskega problema in problema lastnih vrednosti diferencialnega operatorja.

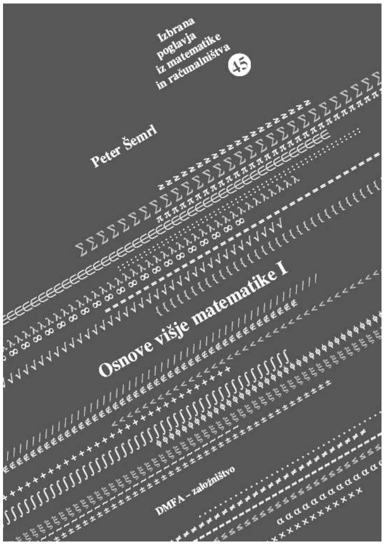
Zadnje poglavje je posvečeno numeričnemu reševanju parcialnih diferencialnih enačb. Po obvezni klasifikaciji teh enačb se predvsem posveti reševanju z metodo končnih diferenc. Pri reševanju enačb eliptičnega tipa si za razlago metod izbere Poissonovo enačbo. Podrobno obravnava iteracijske metode reševanja sistema linearnih enačb, ki ga dobimo pri diskretizaciji Laplaceovega operatorja. Pomemben dodatek v tem poglavju je razlaga novejših večmrežnih metod. Avtor omenja še nekaj drugih znanih metod. Pri enačbah paraboličnega tipa je pomembno ločiti eksplicitne in implicitne metode zaradi stabilnosti. Tudi tu Kozak poveže pojme stabilnosti, konsistence in konvergence. Pri enačbah hiperboličnega tipa pa avtor najprej obravnava advekcijske in druge enačbe prvega reda, nato pa razloži diferenčno metodo in metodo karakteristik za reševanje valovne enačbe. Zaradi omejenega obsega se avtor odpove metodam končnih elementov, ki so zasnovane na variacijski formulaciji. Te bi namreč zahtevale poseben učbenik.

Ob koncu lahko še enkrat pohvalimo avtorjev izbor snovi, zelo skrbno in dosledno strogo obravnavanje zahtevne teorije in dragocene napotke za dejansko reševanje zajetih problemov, saj je dodanih nekaj pomembnejših uporabnih algoritmov. Delo bodo s pridom uporabljali slušatelji numeričnih predmetov in uporabniki, ki pri svojem delu naletijo na katerega izmed obravnavanih problemov.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 30,39 EUR.

Zvonimir Bohte

Peter Šemrl: OSNOVE VIŠJE MATEMATIKE I, Izbrana poglavja iz matematike in računalništva 45, DMFA–založništvo, Ljubljana 2009, 280 strani.



Pri pisanju učbenikov in drugih tekstov smo matematiki zavezani matematični korektnosti. Zapisani besedi naj se ne bi moglo očitati dvoumnosti ali celo nepravilnosti. Ta razumljiva zahteva je lahko tudi ovira. Kadar želimo pojasniti intuitivno ozadje konceptov, včasih tvegamo kršitev standardov matematične strogosti. Ali lahko učbenik napišemo matematično korektno, hkrati pa dostopno razmeroma široki populaciji in v neformalnem slogu? Prav gotovo to ni lahko. Knjiga Petra Šemrla pa dokazuje, da je izvedljivo.

Učbenik je v prvi vrsti namenjen študentom naravoslovja in tehnike ob njihovem prvem srečanju z višjo matematiko. Razdeljen je na pet poglavij: 1. Številske množice, 2. Vektorji, 3. Sistemi linearnih enačb, 4. O funkcijah, 5. Pregled elementarnih funkcij. Vsako poglavje se konča s podpoglavjema „Povzetek“ in „Zahtevnejše branje“ (le tretje poglavje je brez slednjega). V prvem je podana zgoščena obnova posameznega poglavja, drugo pa je pisano za bralce z nekaj več matematičnega posluha.

Besedilo se bere kot zgodba. Sproščeno in tekoče. Živahen stil popestrijo še številne slike. Ni stroge delitve na definicije, izreke in dokaze. Novi pojmi so uvedeni z enostavnimi primeri. Nasploh je motivaciji za obravnavo vsake teme posvečena izjemna pozornost. Zgledi niso vzeti le iz matematike in fizike, temveč tudi iz biologije, ekonomije itd. Avtor je razumevajoč do bralca, ki z matematiko nima posebnega veselja, a se ji ne more izogniti. Prav nobena razlaga mu ni odveč. Zakaj je odštevanje celih števil definirano tako, da je $5 - 7$ enako -2 in ne kako drugače? Zakaj je število -4 manjše od števila -2? In še marsikaj, kar običajno jemljemo kot samoumevno, je pojasnjeno na preprost in neposreden način. Gotovo bodo med bralci tudi taki, ki jim te razlage niso potrebne. A tudi zanje bo pomembno sporočilo tega pisanja: če želimo matematiko zares razumeti, se moramo vprašati o smislu in pomenu vsakega matematičnega pojma.

Knjiga bo izvrsten učbenik za študente naravoslovnih in tehniških fakultet. Zaradi jasne razlage ga bodo lahko uporabili tudi za samostojen študij, ne le kot dopolnilo k predavanjem. Čeprav knjiga ni namenjena študentom matematike, bo kot vzporedni učbenik prav prišla tudi njim. Našli bodo pojasnila za enostavne stvari, ki se jih matematikom praviloma ne „spodobi“ razlagati. A šele razumevanje na osnovni ravni omogoča poglobljen študij. Kot pravi avtor v predgovoru: „Upam, da bodo ob njej lažje in hitreje razumeli potrebo po matematični strogosti, ki sicer prežema njim namenjene matematične tekste.“ Naposled pa menim, da bo knjiga prišla prav tudi nam, profesorjem matematike; morda vsaj kot opomin, kako se moremo prilagoditi tisti večini študentov, ki jim znanje in razumevanje matematike ni eden pomembnejših življenjskih ciljev.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 19,99 EUR.

Matej Brešar

Janez Strnad: FIZIKI – 6. DEL, Modrijan založba, Ljubljana 2008, 208 strani.

Nedavno je pri založbi Modrijan izšla že šesta knjiga iz zbirke *Fiziki*, v kateri avtor Janez Strnad opisuje življenje in delo znanih fizikov. V (za zdaj) zadnjem delu avtor izstopi iz okvira klasične definicije fizika in obravnava kar nekaj osebnosti, ki jih na prvi pogled ne bi uvrstili v tako knjigo. Avtor se tega zaveda in sam pravi, da se počuti nelagodno, če si fizika lasti nekaj, kar ni njeno. Vendar kmalu razloži, da tokrat pridejo na vrsto tisti raziskovalci, katerih zanimanje sicer ni bilo omejeno zgolj na fiziko, so pa ključno prispevali k razvoju fizike, kakršno poznamo danes. Tako med

drugim beremo o družini Bernoulli, Eulerju, Lagrangeu, Laplaceu in Fourieru, pa tudi o Hamiltonu, Ohmu, Teslu, Jukavi in Saganu, če jih izpostavim le nekaj.

Po obliki knjiga sledi svojim predhodnicam: najprej spoznamo življenje fizika in okoliščine, ki so ključno vplivale na njegovo delo, nato sledi njegov (ali njen) prispevek k fiziki. Ob branju knjige tako izvemo tudi marsikaj o zgodovinskih dogodkih, spoznavamo razmere v takratni družbi in kako skoraj neizogibno na znanost vpliva politika.

Poleg osnovnih fizikalnih idej in spoznanj posameznika so praviloma opisani tudi drugi strokovni dosežki in navržena je kakšna zanimivost. Izvemo, da je bil Fourier tisti, ki je uvedel zahtevo, da se enote na obeh straneh enačbe ujemajo, čudimo se ob Teslovem komuniciranju z marsovci ter nasmejimo dejstvu, da je Laplace v svojih delih uporabljal besedno zvezo *„lahko je uvideti“*, kar je že takrat pomenilo ure in ure dodatnega računanja!

Za branje te knjige poznavanje fizike ni nujno potrebno, je pa koristno. Avtor sicer večinoma razloži, za kakšna odkritja gre, ima pa nedvomno svoj čar, ko prepoznavamo osebe, katerih imena smo slišali med učenjem *Fizike I* in *II*, ali pa ko začnemo brskati po spominu *„odkod ga že poznamo?“* Šele s poznavanjem osnovnih fizikalnih (in matematičnih) zakonov se resnično zavemo brezčasnosti in uporabnosti odkritij ter lahko razumemo vpliv, ki so ga imeli ti vsestranski raziskovalci na kasnejši razvoj znanosti.

Pričujoče delo je rezultat obsežnega prebiranja zapisov in preverjanja njihove zanesljivosti, kar ni enostavno delo. Pozoren bralec bo sicer opazil, da se je v knjigo prikradlo nekaj drobnih napak, vendar zato ni knjiga nič manj zanimiva ali privlačna za branje. Pravzaprav s svojo vsebino kar vabi tudi matematike, da jo preberejo, saj gresta – kot ta knjiga nedvomno dokazuje – fizika in matematika z roko v roki bolj, kot si včasih mislimo.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 22,39 EUR.

Mojca Vilfan

OSNOVNI NABOJ IN ŠUM

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 07.50.Hp, 01.65.+g

Čeprav je šum pri prenašanju sporočil nadležen, neposredno opazovanje šuma omogoči merjenje nekaterih količin. Po preprosti poti izpeljemo nekaj osnovnih enačb za šum. Kot zgled obdelamo merjenja osnovnega naboja s šumom. Ta merjenja imajo zanimivo zgodovino.

ELEMENTARY CHARGE AND NOISE

Although noise is an inconvenience in information transmission, direct observation of it enables one to measure some specific quantities. In a simple way some basic equations concerning noise are derived. As an example the measurements of elementary charge by way of noise are considered. These measurements have an interesting history.

Uvod

Številni učbeniki fizike opišejo, kako je Robert Andrews Millikan s sodelavcem v letih od 1910 do 1913 opazoval kapljice med vodoravnima ploščama kondenzatorja in izmeril osnovni naboj. Veliko manj znano je, da so v letih od 1920 do 1925 osnovni naboj izmerili tudi s *šumom*. Zanimivi način merjenja pokaže, da je lahko „šum signal“, čeprav je pri prenašanju sporočil le nadloga. Prek šuma je namreč mogoče izmeriti količine, ki se v povprečjih sploh ne pojavijo. S šumom na primer ugotovijo, da v sklenjenem električnem krogu pri zelo nizki temperaturi med superprevodnikom in navadno prevodno kovino naboj prehaja v parih $-2e_0$, če je e_0 osnovni naboj [1]. Tu ne bomo segali v kvantno fiziko, ampak se bomo v klasičnem okviru dotaknili merjenja osnovnega naboja s šumom.

Šum je prvi sistematično obravnaval leta 1918 Walter Schottky iz laboratorija družbe Siemens [2]. Zanimalo ga je delovanje vakuumskih elektronk, ki so jih začeli na veliko uporabljati. V diodi iz katode izhajajo elektroni z nabojem $-e_0$ ter potujejo proti anodi. Vsi elektroni so enaki in izstopajo iz katode in potujejo na anodo neodvisno drug od drugega. Pri tem mora biti tok nasičen, da anoda posrka vse elektrone, ki izstopijo iz katode. Pri nižji anodni napetosti prostorski naboj okoli katode zavrača elektrone in se ti ne gibljejo neodvisno drug od drugega. V povprečju po dolgem času meri tok na anodo $\overline{I}$. V kratkem času Δt pa je povprečni tok I. V tem času bi v povprečju na anodo priteklo $\overline{I}\Delta t/e_0$ elektronov, priteče pa jih $I\Delta t/e_0$. Za število neodvisnih elektronov, ki pritečejo na anodo, velja *Poissonova porazdelitev*. Enaka porazdelitev velja tudi za število delcev, ki jih v časovni enoti izseva radioaktivni izvir. Za Poissonovo porazdelitev je značilno, da je povprečni kvadrat odmika števila delcev od povprečja enak povprečnemu številu delcev:

$$\sigma_N^2 = \overline{\left(\frac{I\Delta t}{e_0} - \frac{\overline{I}\Delta t}{e_0}\right)^2} = \frac{\overline{I}\Delta t}{e_0}\,.$$

Zvezo delimo z $(\Delta t/e_0)^2$ in dobimo povprečni kvadrat odmika toka:

$$\sigma_I^2 = \overline{(I-\overline{I})^2} = \overline{I^2} - \overline{I}^2 = \frac{e_0\overline{I}}{\Delta t}\,. \tag{1}$$

To je *Schottkyjeva enačba*, ki velja za *Poissonov šum*. Enačba kaže, da je šum toka, kakor imenujemo *fluktuacije toka*, to je naključne odmike toka od povprečnega toka, povezan z dejstvom, da je naboj razdeljen na nedeljive enote. Šuma ne bi bilo, če bi bilo naboj mogoče neomejeno deliti, kakor so mislili v času „električnega fluida“. Schottkyjevo ime *Schrotrauschen* in angleško ime *shot noise* opozarjata na to, da naboj sestavljajo enote, ki spominjajo na šibre ali majhne izstrelke.

Osnovne enačbe

Splošna razprava pripelje do koristnih enačb [3]. Zamislimo si fizikalni sistem, ki iz okolice sprejema med seboj enake, po času naključno porazdeljene dražljaje, ki jih imenujmo *dogodki*. Odziv sistema na dogodek opišemo z $Af(t)$, če je A *jakost odziva* in $f(t)$ *osnovni odziv* sistema. V povprečju po dolgem času se nabere B dogodkov na sekundo. V času dt' se je tako v celoti nabralo Bdt' dogodkov. Za povprečno število dogodkov ob času t'' dobimo:

$$\int_{-\infty}^{t''} BAf(t''-t')\,dt' = AB\int_0^{\infty} f(t)\,dt\,, \tag{2}$$

ko v prvem integralu vpeljemo novo spremenljivko $t = t'' - t'$.

Poiščimo za ta primer še povprečni kvadrat odmika. Pri Poissonovi porazdelitvi leži ob času dt' število dogodkov med $B\,dt' - \sqrt{B\,dt'}$ in $B\,dt' +$

$\sqrt{B\,dt'}$. Odziv na te dogodke v času t'' se spremeni za $\sqrt{B\,dt'}Af(t''-t')$. Prispevki iz različnih časovnih intervalov so med seboj neodvisni, zato je povprečje kvadrata odmika ob času t'':

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{t''} B\,dt' A^2 f^2(t''-t') = A^2 B \int_0^{\infty} f^2(t)\,dt\,. \tag{3}$$

Povprečni kvadratni odmik je v taki splošni zvezi že leta 1909 obdelal N. Campbell, ko je raziskoval nezvezne pojave in posebej nezveznosti pri sevanju svetlobe [4]. Zato enačbo (3) včasih imenujejo *Campbellov izrek*. Pri elektronih, ki priletijo na anodo v diodi, je $B = \overline{N} = \overline{I}/e_0$ in $A = e_0$, tako da je $AB = \overline{I}$ in $A^2B = \overline{I}e_0$.

V nadaljevanju raziščimo, kako se odzove na elektrone, ki priletijo na anodo, nihajni krog. Na diodo vzporedno priključimo kondenzator s kapaciteto C ter tuljavo z induktivnostjo L in uporom R. Ta nihajni krog ima lastno krožno frekvenco $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ in koeficient dušenja $\beta = \frac{1}{2}R/L$. Dušenje naj bo tako šibko, da lahko krožno frekvenco dušenega nihanja $\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ nadomestimo z ω_0. Dogodek, to je oster napetostni sunek, vzbudi v krogu dušeno nihanje napetosti $(e_0/C)\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega_0 t)$. Z osnovnim odzivom $f(t) = (1/C)\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega_0 t)$ dobimo $\int_0^{\infty} f^2(t)\,dt = \int_0^{\infty}(1/C)^2\mathrm{e}^{2\beta t}\cos^2(\omega_0 t)\,dt = (L/C^2R)((R/\omega_0 L)^2+2)/((R/\omega_0 L)^2+4) \approx L/(2C^2R)$. Z $A^2B = e_0\overline{I}$ sledi povprečni kvadrat odmika napetosti:

$$\sigma_U^2 = \frac{e_0\overline{I}L}{2C^2R}\,. \tag{4}$$

V primeru, da velja $\overline{U} = 0$, je $\sigma_U^2 = \overline{U^2}$. V magnetnem polju v tuljavi nakopičena energija je v povprečju enaka v električnem polju v kondenzatorju nakopičeni energiji: $L\overline{I^2} = C\overline{U^2}$. S tem iz enačbe (4) sledi za povprečni kvadrat odmika toka:

$$\sigma_I^2 = \frac{e_0\overline{I}}{2CR}\,. \tag{5}$$

Enačbo (5) izkoristimo, da pridemo do spektralne gostote. Opremo se na *Parsevalovo enačbo*, ki povezuje odziv $f(t)$ z njegovo Fourierovo transformiranko $F(\omega) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{i\omega t}dt$:

$$\int_0^{\infty} |f(t)|^2 dt = 2\int_0^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega\,.$$

Pri tem smo dopustili možnost, da opišemo odziv s kompleksno funkcijo $f(t)$. V izrazu $|F(\omega)|^2$ spoznamo spektralno gostoto. Z enačbo (3) sledi:

$$\Delta\sigma_I^2 = 2A^2 B\Delta\nu = 2e_0\overline{I}\Delta\nu\,. \tag{6}$$

To ustreza enačbi (1), če obratno vrednost časa opazovanja nadomestimo z dvojno širino pasu frekvenc, na katere se odzove nihajni krog: $1/\Delta t = 2\Delta\nu$. Spektralna gostota ni odvisna od krožne frekvence, spekter Poissonovega šuma je *bel*.

Enačba (6) nas napelje na daljši račun. Kompleksno napetost U kompleksna impedanca $Z(\omega)$ poveže s kompleksnim tokom I takole: $U = Z(\omega)I$. Iz zveze sledi za povprečni kvadratni odmik napetosti: $\sigma_U^2 = 2e_0\overline{I}\int_0^\infty |Z|^2 d\nu = (e_0\overline{I}/\pi)\int_0^\infty |Z|^2 d\omega$. Tuljava z uporom ima impedanco $R + i\omega L$ in kondenzator impedanco $1/(i\omega C)$. Obratna vrednost impedance njune vzporedne vezave je $1/Z = 1/(R + i\omega L) + i\omega C$. To da impedanco $Z = (R + i\omega L)/(1 - \omega^2 LC + i\omega CR)$. Za kvadrat njene absolutne vrednosti dobimo $|Z|^2 = (R^2 + \omega^2 L^2)/((1 - LC\omega^2)^2 + C^2R^2\omega^2) = (x^2 + r^2)G(x)/(\omega_0^2 C^2)$, če vpeljemo $x = \omega/\omega_0$ in $r = R/\omega_0 L$ ter $G(x) = 1/((1-x^2)^2 + r^2x^2)$. Nazadnje imamo $\sigma_U^2 = (e_0\overline{I}/\pi\omega_0 C^2)\int_0^\infty (x^2 + r^2)G(x)\,dx$.

V integralu $\int_0^\infty x^2 G(x)\,dx$ vpeljemo novo spremenljivko $1/x$ in ugotovimo, da je enak integralu $\int_0^\infty G(x)\,dx$. To pripelje do $\sigma_U^2 = (e_0\overline{I}/\pi\omega_0 C^2)(1 + r^2)\int_0^\infty G(x)\,dx$. Integral izračunamo po običajni poti tako, da kvadratni izraz v imenovalcu razcepimo, in dobimo za vrednost integrala $\frac{1}{2}\pi/r$. To da $\sigma_U^2 = e_0\overline{I}l(1 + r^2)/(2C^2R)$. V nihajnem krogu s šibkim dušenjem smemo r^2 zanemariti proti 1 in sledi enačba (4). S tem smo si pripravili vse potrebne enačbe.

Schottky je tok skozi diodo in nihajni krog razvil v Fourierovo vrsto in naletel na integral $\int_0^\infty G(x)dx$. Zanj pa je izračunal napačno vrednost $2\pi/r^2$ [2]. To je povzročilo precej zapletov [5]. Po napačnem računu naj bi veljalo $\sigma_I^2 = e_0\overline{I}\omega_0$, kar bi pomenilo, da je spektralna gostota odvisna od frekvence in Poissonov šum ni bel. Napako je popravil in navedel pravo vrednost integrala $\pi/(2r)$ leta 1922 John Bertrand Johnson iz družbe Bell

Telephone [6]. Odklonil je tudi Schottkyjev razvoj neurejeno se spreminjajočega toka v Fourierovo vrsto. Popravek je pripeljal do znane enačbe (4). Schottky je popravek sprejel in navedel bližnjico do prave vrednosti integrala [7]. Ob tem je popravil še drugo napako iz svojega prvega članka.[1]

Merjenje

Schottky je že spočetka načrtoval, da bi z merjenjem šuma ugotovili osnovni naboj. Merjenja se je leta 1920 lotil njegov asistent C. A. Hartmann v Raziskovalnem laboratoriju družbe Siemens & Halske [4]. Meril je Poissonov šum posebne za ta namen izdelane diode pri frekvencah od 250 do 2500 s^{-1} ob pettisočkratni ojačitvi. Spremenljivo jakost zvoka, ki ga je dal ojačeni šum v telefonski slušalki, je primerjal z jakostjo zvoka, ki ga je dal znani izmenični tok z enako frekvenco. Tako je kot prvi opazoval šum. Z napačno Schottkyjevo vrednostjo integrala pa je dobil od stokrat do tisočkrat premajhen osnovni naboj. Izid je tem bolj odstopal od pričakovanega osnovnega naboja, čim večja je bila frekvenca. Hartmann je raziskal, ali utegne biti velikega odstopanja krivo uporabljeno vezje. Nazadnje se je pridružil Schottkyjevi razlagi, da elektroni iz katode izstopajo v gručah in niso neodvisni drug od drugega. Enako kot Schottky je možnost, da obstajajo delci z delom osnovnega naboja, omenil samo mimogrede. Schottky je skoraj obupal nad nadaljnjim obravnavanjem šuma. To je eden od maloštevilnih primerov v razvoju fizike, ko je računska napaka pripeljala do resnih načelnih težav in za dalj časa zavrla razvoj.

Težave je odpravilo Johnsonovo opozorilo [6]. Johnson je tudi ugotovil,

---

[1] Po zanimivi poti je enačbo (4) izpeljal R. Fürth [8]. Privzel je, da elektroni prihajajo v enakomernih časovnih razmikih τ na anodo, ki je povezana z elektrodo kondenzatorja. V nihajnem krogu sproži vsak elektron nihanje naboja. Opazujmo elektron n in elektron $n-1$ pred njim:

$$e = e_0 \mathrm{e}^{(R/2L)(t-n\tau)} \sin(\omega_0(t-n\tau)) + e_0 \mathrm{e}^{(R/2L)(t-(n-1)\tau)} \sin(\omega_0(t-(n-1)\tau)) + \cdots$$

Kdo bi ugovarjal, češ da naboj ne more biti manjši od osnovnega naboja. Vendar je treba upoštevati, da gibanje elektrona z influenco izzove premik drugih elektronov v sosednjih prevodnikih. Nihanja so nekoherentna, zato seštejemo povprečne kvadrate:

$$\overline{e^2} = \frac{1}{2} e_0^2 \sum_n \mathrm{e}^{-(R/L)n\tau} = \frac{1}{2} e_0^2 \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-R\tau/L}} = \frac{1}{2} e_0^2 \frac{L}{R\tau} = \frac{e_0 \overline{I} L}{2R} .$$

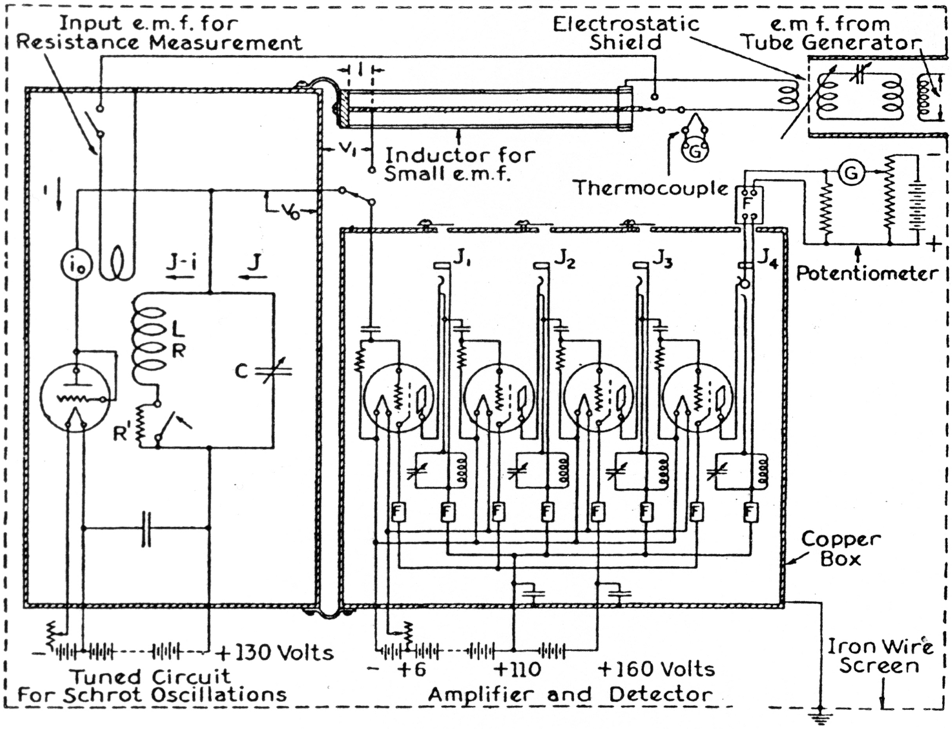
Upoštevali smo izraz za vsoto geometrijskega zaporedja, šibkost dušenja in zvezo $e_0/\tau = \overline{I}$. Enačba $\sigma_e^2 = C^2 \sigma_U^2$ pripelje do enačbe (4).

da Hartmannova merjenja s popravljeno enačbo pri veliki frekvenci dajo pravo velikostno stopnjo osnovnega naboja. Fürth je kritiziral primerjavo dveh različnih vrst zvokov prek slišnega vtisa [8] in menil, da je za odvisnost od frekvence kriva značilnost ušesa. Na novo je analiziral Hartmannove rezultate in enako kot Johnson ugotovil, da dajo pravo velikostno stopnjo osnovnega naboja.

Ponovnega merjenja osnovnega naboja s Poissonovim šumom sta se leta 1925 lotila A. W. Hull in N. H. Williams iz Raziskovalnega laboratorija družbe General Electric [9]. Zanimalo ju je, kolikšen del šuma v tedanjih radijskih sprejemnikih odpade na Poissonov šum. Ugotovila sta, da je treba upoštevati le Poissonov šum. Dotlej se je elektronika precej razvila in sta lahko merila pri višji frekvenci 0,75 MHz. Na plošči kondenzatorja v nihajnem krogu, povezanem z diodo, sta priključila štiristopenjski ojačevalnik. V njem sta na nov način uporabila štiri triode iz vrste, ki so jo kot eno od prvih razvili v General Electric (slika 1). Nihajni krog in ojačevalnik sta z bakreno kletko in še s kletko iz železne mreže zaščitila pred motnjami iz okolice. Ojačeno napetost sta usmerila in merila z enosmernim merilnikom na območju, na katerem je bil odklon sorazmeren s σ_U^2. Merila sta efektivno napetost navzdol do 10^{-4} V. Nihajni krog se je odzval na šum na ozkem frekvenčnem pasu in ojačevalnik ga je ojačil, a ne vseh frekvenc na pasu enako. Zato sta vpeljala ojačevalni koeficient kot $\mathcal{O}^2 \int_0^\infty x^2 G(x) P(x) dx/(\pi/2\pi)$. Pri tem je $\mathcal{O}$ največje ojačenje in $P(x) < 1$ upošteva frekvenčno odvisnost, ki sta jo ugotovila z merjenjem in integral numerično izračunala. Skrbno sta izmerila elemente nihajnega kroga R, L, in C, kar je bila dokaj zahtevna naloga. Koeficient $\mathcal{O}$ sta določila in hkrati umerila enosmerni merilnik tako, da sta na vhod ojačevalnika priključila sinusno napetost z znano efektivno vrednostjo in krožno frekvenco ω_0. Za osnovni naboj sta dobila $1{,}586 \cdot 10^{-19}$ As, kar je bilo le za 0,3 % manj od Millikanovega izmerka $1{,}591 \cdot 10^{-19}$ As. Omenila sta, da bi bilo mogoče precej izboljšati natančnost.

Zatem nekaj časa ni bilo poskusov, da bi osnovni naboj izmerili s šumom. V tem času pa so pogosto merili na območju prostorskega naboja, na katerem anoda ne posrka vseh elektronov. Že Hull in Williams sta opozorila, da je šum v tem primeru manjši kot pri nasičenem toku. Te rezultate je bilo mogoče neposredno izkoristiti pri gradnji elektronk.

Novega merjenja se je lotil L. Stigmark z Oddelka za fiziko univerze v Lundu leta 1952 [10]. V tem času je elektronika naredila še korak naprej.



Slika 1. A. W. Hull in N. H. Williams sta leta 1924 opazovala šum na posebej za to izdelani diodi (skrajno levo). Med anodo in katodo sta zvezala kondenzator s kapaciteto C ter tuljavo z induktivnostjo L in uporom R (levo). Kondenzator sta priključila na vhod štiristopenjskega ojačevalnika (desno). V ojačevalniku sta uporabila elektronke, ki so bile tedaj pomembna novost, a so jih do danes popolnoma izpodrinili polprevodniški elementi. Napravo sta zaprla v bakrene škatle in obdala z železno mrežo, da sta se izognila motnjam [9].

Uporabil je posebno diodo z dolgo volframsko katodo, ki jo je kot obroč obdajala anoda. S tem je dosegel, da povečanje anodne napetosti v diodi ni vplivalo na izid merjenja. V posebej za ta namen izdelanem ojačevalniku, ki je imel tri med seboj ločene in proti zunanjim motnjam zaščitene dele, je uporabil sedem pentod. Delal je pri frekvencah okoli 0,6 MHz. Ojačeno napetost je nazadnje meril s termoelementom. Podobno kot Hull in Williams je merilnik umeril z izmenično napetostjo z znano efektivno vrednostjo pri frekvenci ω_0. Upošteval je tudi *termični šum.* Vsakemu nihajnemu načinu v povprečju ustreza energija k_BT z Boltzmannovo konstanto k_B, kar pripelje do $\sigma_{UT}^2 = 4k_BTR\Delta\nu$. Impedanca nihajnega kroga $(R + i\omega L)/(1 - \omega^2LC +$

$i\omega CR$) v resonanci pri $\omega = \omega_0$ preide v $(R + i\omega L)/(i\omega CR)$ z realnim delom $R_r = L/(CR)$. Za šum v nihajnem krogu, ki se na frekvenčnem pasu s širino $4R_rC$ vede kot upor R_r, neodvisen od frekvence, sledi po zgledu (4) $\sigma_{UT}^2 = 2e_0\overline{I}R_r^2/(4R_rC) = 4k_BTR_r/(4R_rC) = k_BT/C$. To je bilo treba dodati šumu σ_U^2. Tudi Stigmark je skrbno izmeril elemente nihajnega kroga R, L, in C. Nazadnje je dobil za osnovni naboj $1{,}5991 \cdot 0^{-19}$ As, kar se na 0,2 % ujema z današnjo vrednostjo $1{,}602176487 \cdot 10^{-19}$ As.

Pozneje merjenje osnovnega naboja s šumom ni moglo tekmovati z načinom, pri katerem dobijo osnovne konstante z metodo najmanjših kvadratov iz večjega števila merskih podatkov. Merjenja osnovnega naboja s šumom so se preselila v študentske laboratorije [11]. Pri tem so elektronke nadomestili polprevodniški elementi. Študenti pri teh poskusih spoznajo delo z elektronskimi napravami in se seznanijo s fluktuacijami.

LITERATURA

[1] C. Beenakker in Ch. Schönenberger, *Quantum Shot Noise*, Phys. Today **56** (2003) 5, str. 37–42.

[2] W. Schottky, *Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern*, Annalen der Physik **57** (1918), str. 541–567.

[3] E. Mathieson, *Derivation of noise formulas using Campbell's theorem*, Am. J. Phys. **45** (1977) 12, str. 1184–1186.

[4] N. Campbell, *The study of discontinuous phenomena*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **15** (1909), str. 117–136, *Discontinuities in light emission*, Proc. Cambr. Phil. Soc. **15** (1909), str. 310–328.

[5] W. Schottky in C. A. Hartmann, *Experimentelle Untersuchung des Schroteffektes in Glühkathodenröhren*, Zeitschrift für Physik **2** (1920) 3, str. 206; C. A. Hartmann, *Über die Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt*, Annalen der Physik **65** (1921), str. 51–78; W. Schottky, *Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit*, Annalen der Physik **67** (1921), str. 79–81.

[6] J. B. Johnson, *Bemerkung zur Bestimmung des elektrischen Elementarquantums aus dem Schroteffekt*, Annalen der Physik **67** (1922), str. 154–156.

[7] W. Schottky, *Zur Berechnung und Beurteilung des Schroteffektes*, Annalen der Physik **68** (1922), str. 157–176.

[8] R. Fürth, *Die Bestimmung der Elektronenladung aus dem Schroteffekt an Glühkathodenröhren*, Physikalische Zeitschrift **23** (1922), str. 354–362.

[9] A. W. Hull in N. H. Williams, *Determination of elementary charge e from measurement of the shot-effect*, Physical Review **25** (1925) 2, str. 147–173.

[10] K. A. L. Stigmark, *A precise determination of the charge of the electron from shot-noise*, Arkiv för fysik **5** (1952), str. 399–426.

[11] D. R. Spiegel in R. J. Helmer, *Shot-noise measurements of the electron charge: An undergraduate experiment*, Am. J. Phys. **63** (1995) 6, str. 554–560.

VSEBINSKO ZNANJE IN NARAVOSLOVNO RAZMIŠLJANJE

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 01.40.fk, 01.40.G–

Zapis na kratko poroča o poskusu, pri katerem so ocenili zmožnosti ameriških in kitajskih novincev na univerzi pri fiziki. Pri tem so v prvem koraku ugotavljali vsebinsko znanje mehanike in elektromagnetizma ter v drugem zmožnost naravoslovnega razmišljanja. V prvem koraku so se Kitajci, ki so imeli v srednji šoli veliko fizike, odrezali veliko bolje od Američanov. V drugem koraku pa med obojimi ni bilo razlike. Ali izidi lahko dajo koristne namige za učitelje fizike na naših srednjih šolah?

CONTENT KNOWLEDGE AND SCIENTIFIC REASONING

An experiment in which the abilities of American and Chinese freshmen in physics were assessed is briefly reported. Thereby in the first step content knowledge in mechanics and electromagnetism and in the second step the ability of science reasoning were established. In the first step the Chinese, who have had much more physics in high school, scored much better than Americans. In the second step there was no difference. Can the results give useful clues for physics teachers in our high school?

V *naravoslovni metodi*, ki jo fiziki uporabljamo pri raziskovanju narave, novo zamisel navadno oblikujemo kot kvantitativno napoved. Napoved preizkusimo z merjenjem pri poskusih v nadzorovanih okoliščinah. Zamisel, ki se ne sklada z dobljenimi izidi, zavržemo ali prilagodimo. Objavljen članek o tem omogoči, da poskus v enakih okoliščinah ponovijo v drugem laboratoriju. Zamisli, ki ustrezajo tem zahtevam, dodamo obstoječemu znanju, ki nikoli ni dokončno. Nekateri posebej poudarjajo, da je za naravoslovje značilno, da v njem trditev ni mogoče dokazati, lahko jih le ovržemo.

Na vseh stopnjah poučevanja danes izvajajo *poučevalske poskuse*, da bi izboljšali učinkovitost poučevanja, in o njih poročajo v strokovnih revijah. Pri poskusih ugotavljajo – „merijo“ – odziv učencev, dijakov in študentov na poučevanje, njihovo znanje, razumevanje in navade ter drugo, kar je povezano s poučevanjem. Izidi poskusov naj bi omogočili boljše razumevanje poučevanja in učenja ter pripeljali do izboljšav. Poskusi te vrste se med seboj znatno razlikujejo in segajo od anket in izpolnjevanja vprašalnikov prek reševanja pisnih računskih nalog in kvalitativnih vprašanj do študentskih poskusov v laboratoriju in pogovorov s posameznimi zastopniki skupin. To so *poskusi z ljudmi*, ki sodijo v znanosti o ljudeh in družbi, kot so psihologija, sociologija ter pedagogika in specialna pedagogika ali didaktika (poimenovanje ni enotno). Teh poskusov ni mogoče izvajati podobno, kot poskuse izvajajo raziskovalci v fiziki.[1] Izide ponavadi statistično obdelajo in navedejo povprečja.

Poskusi z ljudmi so povezani z značilnimi težavami. Poskusi naj ne bi škodili udeležencem. Pojavi se vprašanje, kako izbrati sestavo in število udeležencev v glavni in v kontrolni skupini. Kdo naj v njiju uči ter kdo in kako ocenjuje izide? Izidi so lahko odvisni od številnih dejavnikov, od načina postavljanja nalog in vprašanj do pričakovanj in vneme izvajalcev, od njihovih namenov ter od družbenega okolja. Ali bi drugi izvajalci z drugačnim načinom dobili podobne izide? Izidov ni mogoče naravnost prenesti v drugo okolje. Ni jih mogoče smiselno ponoviti z istimi udeleženci. Odmiki od povprečij utegnejo biti pri njih precej veliki. Tako ne preseneča širok razpon pogledov na razne vrste poučevalskih poskusov, ki sega od načelnega dvoma do trdnega zaupanja. S tem je povezana krilatica, da vsak poučevalski poskus sicer nekaj meri, manj jasno pa je, kaj meri. Najbrž je tudi v tem primeru smiselno uravnovešeno stališče: poskusi so pogosto koristni, njihove izide pa kaže sprejemati zadržano, posebej ko gre za vključevanje novosti v učne načrte. Za učitelje utegne biti predvsem koristno, da premislijo o dobro zasnovanih poučevalskih poskusih in vsakega presodijo na podlagi lastnih izkušenj.

Poročajmo o široko zasnovanem poučevalskem poskusu v Združenih državah in na Kitajskem, katerega izid utegne biti splošno zanimiv [1]. Za poskus so izbrali fiziko, ker so v njej zadeve razmeroma dobro opredeljene. Podobne izide pa je mogoče pričakovati tudi v drugih vejah naravoslovja. Šolska sistema od vstopa v šolo do dvanajstega šolskega leta, ki mu sledi vstop na univerzo, se v ZDA in na Kitajskem izrazito razlikujeta. V ZDA ni enotnega učnega načrta, srednješolci se sicer s fiziko delno srečajo pri naravoslovju, a samo vsak tretji od njih izbere dvosemestrsko fiziko. Fiziki posvečeni čas je za različne srednješolce zelo različen. Prav tako v zelo

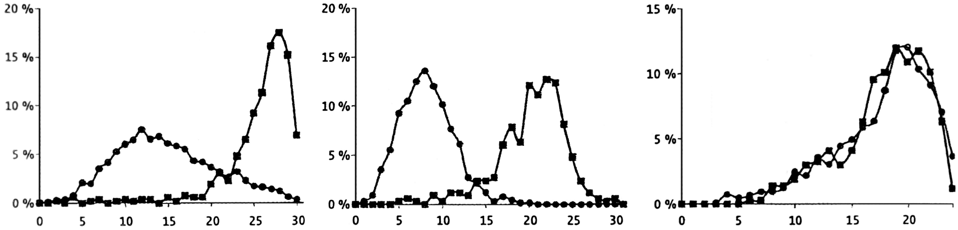
[1] Še najbolj se jim približajo *dvojno slepi poskusi* pri preizkušanju zdravil. Glavna skupina ljudi dobiva učinkovino, kolikor mogoče enakovredna kontrolna skupina pa placebo. Ne izvajalci ne udeleženci poskusa ne vedo, v kateri skupini je kdo. To razkrijejo šele ob obdelavi izidov. Poučevalskih poskusov ni mogoče izvajati slepo.

različnem obsegu uporabljajo matematiko in delajo računske vaje. Na Kitajskem pa velja enoten učni načrt za vse srednješolce. Fizika se začne v osmem šolskem letu in traja vseh nadaljnjih pet šolskih let. Vse srednješolce čaka enak sprejemni izpit na univerzo.

Skupina sedmih poučevalcev z ameriških univerz in petih s kitajskih univerz je v obeh državah raziskovala odziv novincev v prvem letniku univerze, preden so prišli v stik s fiziko na univerzi. Poskusov se je v celoti udeležilo več kot 5 tisoč novincev naravoslovnih in tehniških usmeritev s štirih ameriških in treh kitajskih univerz s srednjim ugledom. Izvajalci poskusov so dobro poznali razmere v šolstvu obeh držav. Pri novincih so v prvem koraku ugotavljali vsebinsko znanje izbranih fizikalnih poglavij mehanike in elektrike in v drugem zmožnost naravoslovnega razmišljanja. V prvem koraku so uporabili *Pregled pojma sile FCI* [2] in *Kratko ocenjevanje elektrike in magnetizma BEMA* [3]. Za drugi korak so izbrali Lawsonov *Preizkus naravoslovnega razmišljanja v razredu LCTSR* [4]. Vse tri načine so že prej razvili in velikokrat preizkusili v ZDA ter prevedli in preizkusili na Kitajskem.

Po pričakovanju so se kitajski študenti odrezali veliko bolje (slika 1): (86 ± 14)-odstotni uspeh pri mehaniki in (66 ± 13)-odstotni pri elektriki – od ameriških vrstnikov: (49 ± 19)-odstotni uspeh pri mehaniki in (27 ± 10)-odstotni pri elektriki (navedena so na dve mesti zaokrožena povprečja in efektivni odmiki). Uspeh pri mehaniki, ki je tesneje povezana z vsakdanjimi izkušnjami, je bil pri obojih boljši. Razmerje dosežkov pri elektriki, ki velja za bolj zapleteno, je bilo večje ($66/27 = 2{,}4$) kot pri mehaniki ($86/49 = 1{,}8$). Pri ugotavljanju zmožnosti naravoslovnega razmišljanja je bilo čisto drugače. Oboji študenti so se izkazali skoraj povsem enako: pri 74-odstotnem uspehu je bila razlika manjša od pol odstotne točke (Kitajci so dosegli $74{,}5 \pm 15{,}8$ odstotkov in Američani $74{,}2 \pm 18{,}0$). Ali ta razmeroma velik uspeh v primeri s prejšnjimi ne kaže, da so bila v tem primeru vprašanja s fizikalnega stališča razmeroma nezahtevna?

Vsebinsko znanje mehanike ali elektrike je mogoče dokaj dobro opredeliti. Tudi ta poskus je pokazal, da je pri tem uspeh boljši, če srednješolci in njihovi učitelji vložijo več dela. Naravoslovno razmišljanje pa je teže opredeliti in zahteva drugačne zmožnosti. Načrtno je treba razmisliti o nalogi, spoznati količine, ki se spreminjajo, in ugotoviti povezave med njimi, opazovati, oblikovati domnevo in jo preizkusiti, kritično premisliti o posledicah. Vključene so tudi osnovne matematične predstave kot sorazmernost in po-



Slika 1. Porazdelitev študentov po doseženem uspehu (v točkah) v znanju mehanike (levo), elektrike in magnetizma (sredina) ter zmožnostjo naravoslovnega razmišljanja (desno). Krožci kažejo uspeh Američanov, kvadratki pa uspeh Kitajcev. (Profesor Lei Bao je ljubeznivo dovolil ponatis slik iz [1].)

dobnost. V tem primeru vprašanja pogosto nimajo določenega odgovora ali nimajo enega samega odgovora. Naravoslovnega razmišljanja v šoli ne poučujejo neposredno. Srednješolci naj bi ga usvojili posredno pri fiziki in drugih naravoslovnih predmetih. Zmožnost naravoslovnega razmišljanja je pomembna za poklicno pot v naravoslovju in tehniki. Pri mehaniki in elektriki je treba pokazati vsebinsko znanje, na primer, da je z vzrokom gibanja sorazmeren pospešek, ne hitrost, in da ima elektron negativni naboj. Pri naravoslovnem razmišjanju ni tako. Zato se pojavi nevarnost, da je to, kar naj bi bilo naravoslovno razmišljanje, v resnici povezano z vsakdanjimi izkušnjami in treznim razmišljanjem, kar včasih imenujejo „zdrava pamet“. Opisani poskus je podprl misel, da naravoslovno razmišljanje zahteva drugačne zmožnosti kot vsebinsko znanje.

Razmere pri nas niso niti tako enobarvne kot na Kitajskem niti tako pisane kot v ZDA. Zato spoznanj, ki so jih dobili za ameriške in kitajske srednješolce, ni mogoče naravnost prenesti k nam. Vseeno pa je o njih smiselno razmisliti. Po mnenju piscev članka se zdi za višje zmožnosti pri naravoslovnem razmišljanju pomembneje, kako učimo, kot kaj učimo [1]. V splošnem se naravoslovno razmišljanje zdi pomembno, ker tudi zunaj šole vzpodbuja razločevanje med tem, kaj je mogoče preizkusiti in kaj je le osebno mnenje. Zavesti o tem, da je preizkušene izjave smiselno in koristno razločevati od osebnega mnenja, pa je v družbi nasploh premalo.

Ali je vsebinsko znanje šibkeje povezano z zmožnostjo naravoslovnega razmišljanja, kot pričakujemo? Ali morda to pomeni, da z izboljšanjem vsebinskega znanja lahko le malo vplivamo na zmožnost naravoslovnega razmišljanja? Ali sega naravoslovno razmišljanje v globlje plasti mišljenja, ki so manj dostopne poučevanju? Ali ima smisel sicer pretirana misel, da poučevanje fizike in naravoslovja lahko izboljša znanje o naravi, ne more pa spreobračati? Poučevalski poskusi so razkrili, da nekateri dijaki sploh ne usvojijo Newtonove mehanike. Na pamet se naučijo, kar je potrebno, da zadostijo obveznostim v šoli, ostanejo pa prepričani v „mehaniko“ s potezami Aristotelove slike. Da je vsebinsko znanje šibko povezano z zmožnostjo naravoslovnega razmišljanja, namiguje še spoznanje, da nekateri zelo uspešni raziskovalci v fiziki izvirajo iz različnih okolij in šolskih sistemov in tudi zaradi posebnih okoliščin, na primer vojne, v srednji šoli niso imeli dosti fizike. Ali je to povezano z ugotovitvami, da mladostnik že pri 10 do 14 letih izbere svoj pogled na naravoslovje? Pri tem je, kot kaže, šola manj pomembna kot okolje, posebno vlogo pa naj bi pri tem imela podoba o sebi, o lastnih zmožnostih, zahtevah in pričakovanjih.

Nekaj zgledov za vprašanja

FCI [2]

1. Od enako velikih kovinskih kroglic tehta ena dvakrat več kot druga. Kroglici spustimo z dvenadstropne stavbe v istem trenutku. Čas, ki ga porabita kroglici do tal, bo:

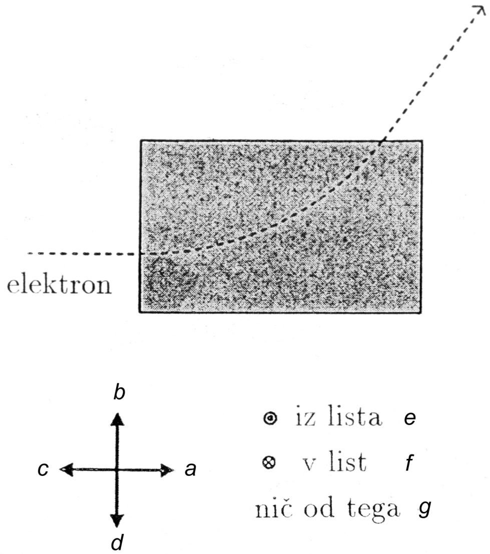
(A) polovičen za težjo kroglico,
(B) polovičen za lažjo kroglico,
(C) približno enak za obe kroglici,
(D) znatno krajši za težjo kroglico, ampak ne polovičen,
(E) znatno krajši za lažjo kroglico, ampak ne polovičen.

17. Kamen, ki pada s strehe enonadstropne stavbe na tla:

(A) doseže največjo hitrost kmalu po tem, ko ga spustimo, in pada potem s konstantno hitrostjo,
(B) pada vse hitreje, predvsem zato, ker se povečuje gravitacijski privlak s približevanjem zemlji,
(C) pada vse hitreje, ker deluje nanj konstantna gravitacijska sila,
(D) pada zaradi notranje težnje vseh predmetov, da padajo proti zemlji,
(E) pada zaradi kombinacije gravitacijske sile in tlaka, ki ga tišči navzdol.

BEMA [3][2]

Izberi eno od mogočih smeri na sliki kot odgovor na vprašanje. Katera je mogoča smer (a–g) magnetnega polja na območju, na katerem je polje različno od nič?



LCTSR [4]

1. Denimo, da dobiš dve enaki krogli iz gline. Obe krogli tehtata enako. Eno od njiju sploščiš v tvorbo, podobno palačinki.

   (a) tvorba v obliki palačinke tehta več kot krogla,
   (b) oba kosa še vedno tehtata enako,
   (c) krogla tehta več od tvorbe v obliki palačinke.

Katera od naslednjih trditev je pravilna?
2. Ker

   (a) ima sploščena oblika večjo površino,
   (b) krogla v eni točki bolj tišči navzdol,
   (c) zgubi težo tisto, kar sploščimo,

[2] BEMA ni bil v celoti objavljen in na spletu ni neposredno dostopen, FCI pa je bil objavljen v celoti. V prvem primeru naj udeleženci poskusa ne bi vnaprej poznali vprašanj in odgovorov nanje – kot pri naši maturi. V drugem primeru pa obravnavanje vprašanj in odgovorov prispeva k učenju.

(d) gline nismo dodali ali odvzeli,

(e) pridobi težo tisto, kar sploščimo.

LITERATURA

[1] L. Bao, T. Cai, K. Koenig, K. Fang, J. Han, J. Wang, Q. Liu, L. Ding, L. Cui, Y. Luo, Y. Wang, L. Li in N. Wu, *Learning and Scientific Reasoning*, Science **323** (2009), str. 586–587.

[2] D. Hestenes, M. Wells in G. Swackhamer, *Force Concept Inventory*, Phys. Teacher **30** (1992), str. 141–158.

[3] L. Ding, R. Chabay, B. Sherwood in R. Beichner, *Evaluating an electricity and magnetism assessment tool: Brief electricity and magnetism assessment*, Phys. Rev. ST Phys. Educ. Res. **2** (2006) 1, 0101105.

[4] A. E. Lawson, *Classroom scientific reasoning*, Revised edition, Arizona State University 2000.

NOVE KNJIGE

Lawrence Weinstein in John A. Adam: GUESSTIMATION – SOLVING THE WORLD'S PROBLEMS ON THE BACK OF A COCKTAIL NAPKIN, Princeton University Press, Princeton 2008, 320 strani.

Ena od najpomembnejših spretnosti, ki bi jih morali obvladati vsi študenti naravoslovja, tehnike in medicine, a tudi marsikatere druge vede, je hitra kvantitativna ocena kake količine ali pojava. Ta veščina je nujna za dobro opravljanje poklica. Velikost je namreč vselej pomembna, naj gre za maso planeta, za porabo goriva ali za zvišanje temperature pri bolniku. Knjiga *Guesstimation*, ki sta jo napisala Lawrence Weinstein in John A. Adam, je privlačen izbor rešenih vprašanj, v angleško govorečem svetu poznanih kot „back-of-the-envelope problems“ ter „Fermi problems“ (po Enricu Fermiju, ki so mu bili tovrstni premisleki v posebno veselje). Rešitev takega vprašanja terja predvsem tehten premislek, kaj lahko vpliva na odgovor, oceno reda velikosti vhodnih podatkov in zelo osnovno matematično znanje.

Tipična naloga iz knjige je recimo tale: Koliko žogic za golf bi sestavljalo krožnico, s katero bi opasali Zemljin ekvator? Za odgovor potrebujemo poleg splošno znanega polmera Zemlje le oceno velikosti žogice, pri čemer se, kot na splošno svetujeta avtorja, lahko zanesemo na to, kaj se nam ne zdi ne premalo ne preveč, temveč ravno prav. Nauk rezultata je tudi nekakšna predstava ene milijardine – ponazarja jo ena rdeča žogica v nizu belih okoli ekvatorja. To nalogo imamo lahko za ogrevanje, pri tisti o površini ZDA, ki bi jo bilo treba pokriti s sončnimi celicami, da bi zagotovili dovolj energije za preskrbo te države, pa se že spoprimemo z resnejšo vsebino. Tem bolj, ker Weinstein in Adam v odgovorih rezultat ocene vselej postavita v perspektivo: 0,4 % površja ZDA se res ne sliši veliko, a masovna investicija v sončne celice bi bila zelo draga, prenos energije do mest tudi in akumulatorji za shranjevanje energije prav tako.

Na začetku knjige najdemo nadvse koristni poglavji z napotki, kako se vprašanj sploh lotiti ter kako ravnati s števili. Sledi 9 tematskih poglavij – prvo vsebuje splošna vprašanja, drugo obravnava živali in ljudi, tretje prevoz, četrto delo in energijo, peto kemično energijo, šesto vesolje, sedmo energijo in okolje, osmo atmosfero in deveto tveganje. Namesto sklepa je kajpak poglavje z nerešenimi vprašanji. Za tako rekoč vse zglede iz knjige velja, da nam skušajo približati kvantitativno plat vsakdanjega življenja, ki je često ne opazimo; izjema je vprašanje o masi mola mačk. Vprašanja so sodobna in polna okoljske problematike, kar je zelo primerno.

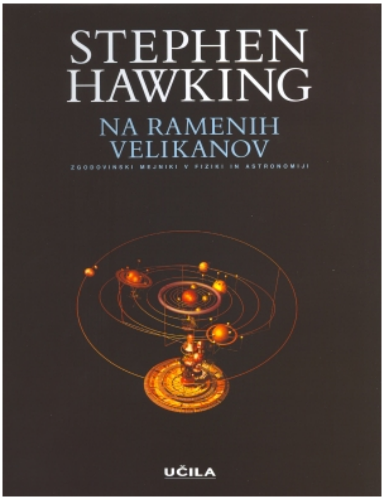
Ob branju se hitro zavemo, da je marsikateri številski podatek, na katerega naletimo v strokovni in poljudni literaturi in v javnih občilih, mogoče hitro preveriti, za kar zadoščata le zdrava pamet in osnovna splošna razgledanost. To je važno sporočilo, saj ni nobenega razloga, da bi se ustrašili kateregakoli vprašanja. Ob nalogah, kakršne so zbrane v knjigi, se ne urimo le v kvantitativnem ocenjevanju, temveč tudi v analitičnem mišljenju, kajti prva stopnja reševanja je vselej premislek, kaj vse bi na odgovor sploh lahko vplivalo in v kolikšni meri; na tem zasnujemo prvi približek. Takšne sposobnosti pridejo še kako prav pri čisto vsakem delu. Zato bi kazalo čim večkrat izrabiti priložnost in v pouk vtkati naloge, ob katerih bodo študenti te spretnosti lažje razvili.

Čeprav sta avtorja Američana in so nekatera vprašanja v knjigi prilagojena tamkajšnjim razmeram in merskim enotam, v odgovorih vselej takoj preskočita na SI. Izbrala sta posrečen format, ki bralca spodbuja, da se naloge loti sam. Na lihi strani najdemo vprašanje, praviloma zelo kratko, in na glavo postavljene namige, ki postopoma pomagajo do rešitve, na naslednjih straneh pa je podroben opis rešitve. Prepričan sem, da bo marsikdo postal pri vprašanju in obrnil list šele tedaj, ko bo imel svoj odgovor.

Weinstein je fizik in Adam matematik, a tega v vsebini knjige skorajda ni videti – ta je namreč naravoslovno-tehnična v najboljšem pomenu izraza. V korektni in duhoviti analizi nalog se vsekakor ne zrcalita le njuna poklica. *Guesstimation* toplo priporočam v zabavo in v razmislek, kako izboljšati predavanja in vaje.

Primož Ziherl

Stephen Hawking: NA RAMENIH VELIKANOV. ZGODOVINSKI MEJNIKI V FIZIKI IN ASTRONOMIJI, Učila International, Tržič 2005, 256 strani.



Isaac Newton je leta 1726 izjavil: „Če sem videl dlje, sem zaradi tega, ker sem stal na ramenih velikanov“. To je napeljalo Stephena Hawkinga na naslov, ki ga je dal zborniku odlomkov iz del petih znanih fizikov in astronomov ter jih opremil s kratkimi zapisi o njihovem življenju in delu. Nikolaj Kopernik je zastopan z odlomkom iz prvega dela knjige *O vrtenjih nebesnih krogel* iz leta 1543 (26 strani), Galileo Galilei s štirimi odlomki o padanju teles, zvoku in enakomerno pospešenem gibanju iz *Pogovorov in matematičnih dokazov v dveh novih znanostih* iz leta 1638 (33 strani), Johannes Kepler z odlomkom iz *Harmonij sveta* iz leta 1618 (31 strani), Newton z odlomkom iz *Matematičnih načel filozofije narave* iz leta 1687 (27 strani) in Albert Einstein s kratkimi odlomki o posebni in splošni teoriji relativnosti iz let od 1905 do 1917 (45 strani).

Omenjeni fiziki in astronomi so odločilno prispevali k temu, da se je postopno spremenil pogled na naravo. Kopernik je Zemljo izenačil z drugimi planeti, ki krožijo okoli Sonca, in ji odvzel središčno lego. Galilei je prvi načrtno opazoval nebo s teleskopom in s svojimi odkritji podprl Kopernikovo sliko. Pri tem je stavil na opazovanja in merjenja pri poskusih in podatke, ki jih je dobil pri tem, povezoval z enačbami. Kepler je po opazovanjih ugotovil zakone o gibanju planetov po elipsah okoli Sonca. Njegovi zakoni so Newtonu pripravili pot do zakonov gibanja in gravitacijskega zakona. S temi zakoni je poenotil opis gibanja na Zemlji in v Osončju. Einstein je spremenil pogled na prostor in čas ter na popolnoma nov način podrobneje opisal gravitacijo z ukrivljenostjo štirirazsežnega prostor-časa.

Ali so izbrani kratki odlomki za pisce najbolj značilni, je stvar osebne presoje. Vprašanje pa je, ali je Hawking izpolnil obljubo iz predgovora, da bo sledil razvoju pogledov na vesolje. Ali ne bi kazalo vključiti kakega odlomka iz Galilejevega *Dvogovora o dveh velikih svetovnih sestavih* iz leta 1632, ki je leto zatem pripeljal do cerkvene obsodbe in prepovedi, da piše o vesolju. Tudi ne gre zaupati vsem trditvam v zapisih, ki spremljajo odlomke. „Da bi dopolnil to sliko je [Ptolemaj] postavil Zemljo rahlo iz središča in imenoval to točko ekvant“ (stran 14). Že Hiparh je premaknil Zemljo iz središča deferenta za ekscenter. Ptolemaj je – precej bolj zapleteno – ekvant za enako razdaljo premaknil na drugo stran središča. Presečišče poltraka, ki enakomerno kroži okoli ekvanta, z deferentom je določalo središče epicikla, po katerem je krožil planet. Menda je Kopernik nasprotoval ekvantu, ker je povzročil odmik od enakomernega kroženja. „Cerkev je marca 1632 zaukazala tiskarjem, naj prenehajo tiskati“ Galilejevo knjigo (stran 60). *Dvogovor* so tega leta natisnili z dvema dovoljenjema cerkvenih cenzorjev, gonja proti knjigi se je začela po izidu.

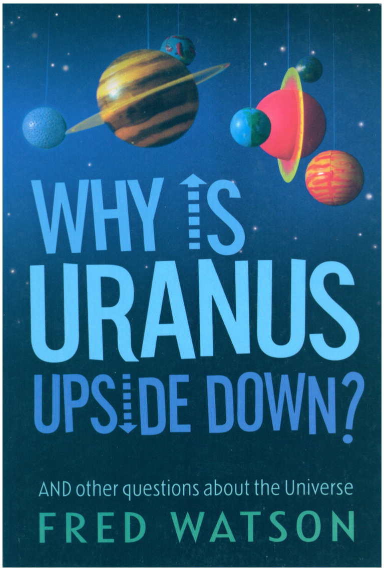
Pogled v knjižne kataloge ali na splet nas pouči, da je pred nami kratka različica, ki je v angleščini izšla z naslovom *Ilustrirana Na ramenih velikanov* leta 2004. Dolga različica *Na ramenih velikanov* je v angleščini izšla leta 2002 na 1266 straneh. V njej so precej daljši odlomki: Kopernikov ima 383 strani, Galilejev 227, Keplerjev 89, Newtonov 427 in Einsteinov 97 strani. Kratki različici je Hawking dodal več barvnih slik na način, znan iz ilustriranih izdaj njegovih drugih knjig. Slike večinoma niso tesneje povezane z odlomki, napisi ob njih pa jih večkrat le pomanjkljivo pojasnjujejo. Večina fizikov bo najbrž raje imela daljšo različico kot krajšo. *Ilustrirana Na ramenih velikanov* bo najbrž zanimiva za širši krog bralcev. Pri tem ima slovenski bralec prednost pred angleškim. Besedila so z izjemo Kopernikovega prispevka prvič v tem obsegu prevedena v slovenščino, medtem ko je v angleščini na voljo več prevodov navedenih del. Odlomkov ni bilo lahko prevajati. Prevod je tekoč, očitati mu je mogoče le tu in tam kako malenkost, pa še to utegne biti stvar okusa.

Bralcu, ki ga zanimajo razvoj astronomije in začetki fizike, bo knjiga odprla več zanimivih pogledov. Če bo o njih pripravljen razmišljati in se morda še poučiti iz drugih virov, bo za branje bogato nagrajen.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 23,34 EUR.

Janez Strnad

Fred Watson: WHY IS URANUS UPSIDE DOWN? AND OTHER QUESTIONS ABOUT THE UNIVERSE, Allen & Unwin, 2007, 264 strani.



Knjigo *Why is Uranus upside down?* je napisal Fred Watson, vodilni astronom na Anglo-avstralskem observatoriju (AAO). Fred Watson je v osemdesetih letih prejšnjega stoletja vodil kontaktno oddajo z astronomsko tematiko na avstralskem radiu ABC. Knjiga je nastala na podlagi vprašanj, ki so jih desetletje postavljali poslušalci Fredove oddaje.

V knjigi je predstavljenih 148 vprašanj in odgovorov, ki pokrivajo različna področja, kot so naravni pojavi, astronomska oprema, delo astronomov, vesoljski poleti, vesoljski teleskopi, teoretične osnove astronomije ... Na začetku vsakega poglavja je krajši uvod, v katerem avtor predstavi novo temo in tako bralcu olajša razumevanje vprašanj in odgovorov. Knjigo začne s poglavji, ki se tičejo same Zemlje in naravnih pojavov, ki smo jim priča v vsakdanjem življenju, nadaljuje pa z našim Osončjem, kjer med drugim pojasni, zakaj je Pluton izgubil status planeta, in seveda, zakaj je Uran „prekucnjen“. V naslednjih poglavjih se seli skozi Galaksijo, pojasni, zakaj zvezde svetijo, kako nastanejo, kako končajo svoje življenje, in ob tej priložnosti predstavi supernove, pulzarje, nevtronske zvezde in črne luknje. Knjigo konča s poglavjem o kozmologiji, kjer med drugim pojasni Hubblov zakon, zaradi katerega je Albert Einstein vrgel kozmološko konstanto iz svojih enačb. Predstavi tudi rezultate opazovanj prasevanja in razloge, zakaj so astronomi danes mnenja, da v vesolju prevladujeta temna energija in temna snov, in ne pozabi omeniti, da danes še vedno ne vemo, kaj sta ti dve temni zadevi.

Knjiga je pisana na poljudnem nivoju in je razumljiva širšemu krogu bralcev, saj je avtorjev cilj približati astronomijo prav tistim, ki se z astronomijo ne ukvarjajo. Poleg strokovnih tem se v knjigi dotakne tudi vprašanja, kakšne koristi sploh imata posameznik in pravzaprav vse človeštvo od astronomije, zato knjigo priporočam vsem, ki jih astronomija in z njo povezane teme zanimajo vsaj toliko, da se jim občasno porodi kakšno vprašanje, na katero ne poznajo odgovora.

Uroš Kostić

Alan Dyer: MISIJA NA LUNO, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 2009, 80 strani.

20. julija 2009 je minilo štirideset let, odkar je pristala prva človeška posadka na Luni. Za mlade generacije je to precej oddaljen dogodek, ki pa je postal zaradi nenavadnih medijskih sprevračanj nekakšen negativni mit. Marsikdo je namreč prepričan, da odprave Apollo na našem naravnem satelitu niso nikoli pristale in so Američani vse skupaj posneli v filmskih studiih. Morda pa bo prav pričujoča knjiga spremenila pogled na ta zgodovinski dogodek. Že res, da je bilo osvajanje Lune posledica hladne vojne in tekmovanja med tedanjima velesilama, a to ne zmanjšuje tehnološkega in konec koncev tudi znanstvenega uspeha odprav. Knjiga na slikovit način predstavlja Luno, predvsem pa njeno osvajanje. Ni namenjena le mladim radovednežem, temveč tudi starejšim bralcem, ki se morebiti še spominjajo, kako so davnega leta 1969 na črno-belih televizorjih v živo spremljali pristanek Apolla 11 na Luni. Knjigi je priložen tudi DVD s filmom o osvajanju Lune, ki je lahko tudi dober učni pripomoček. Žal pa moj predvajalnik na ploščku ni našel slovenskih podnapisov, kar je velika škoda.

Za konec pa še to. Med tistimi, ki so bili pri pristanku Eagla na Luni „zraven“, vlada precejšnja zmeda glede tega, kdaj in kaj so gledali po televiziji. Mnogi se namreč spomnijo, kako so jih starši sredi noči zbudili, da so gledali pristanek na Luni. Spet drugi pomnijo, kako so v vaški gostilni dogodek spremljali že v večernih urah. Dejstvo je, da je Eagle po našem času pristal v večernih urah, Armstrong pa je na Lunino površje stopil okoli četrte ure zjutraj. Na tedanji televiziji Ljubljana sta od večernih do zgodnjih jutranjih ur dogodek komentirala dr. Vladimir Ribarič in Boris Bergant.

Andrej Guštin

Guillaume Cannat: GLEJ JIH, ZVEZDE! NAJLEPŠI PRIZORI NA NEBU, PRIROČNIK ZA OPAZOVANJE V LETU 2009, Tehniška založba Slovenije, Ljubljana 2009, 144 strani.

Pri Tehniški založbi Slovenije je v všečnem prevodu kolegov Antona Šepca, Marjana Bobca in Ludvika Jevšenaka izšel priročnik za opazovanje nočnega neba *Glej jih, zvezde!*, ki ga vsako leto pripravi poznan francoski astronom in plodovit avtor Guillaume Cannat. S tremi besedami lahko priročnik opišem kot efemeride v slikanicah. Avtor v poglavjih, razdeljenih po mesecih, prikaže najzanimivejše pojave, ki jih takrat lahko vidimo na nebu. Opise dopolni s komponiranimi slikami, ki tudi neveščim nočnega opazovanja slikovito prikažejo, kaj lahko pričakujejo. Tu pridejo do izraza avtorjeve bogate izkušnje in poznavanje astrofotografije. Poleg tega so v knjigi, kot rozine v potici, natreseni nasveti za nočna opazovanja, orientacijo po nebu, krajša kronika zanimivejših relevantnih zgodovinskih dogodkov, poveznih z astronomijo in dogajanja v medplanetarnem prostoru, dodanih pa je tudi nekaj krajših astronomskih pojasnil, kot denimo „Kaj je Rimska cesta“, „Barve zvezd“, „Imena zvezd“ ...

Priročnika najbrž ne bomo prebrali na dušek kot knjigo, ker se vsebine ponekod preveč ponavljajo, je pa primeren pripomoček predvsem za mlajše oz. začetniške opazovalce neba.

Knjigo lahko naročite pri DMFA–založništvo po članski ceni 7,99 EUR.

Aleš Mohorič

KOLUMELA: POSLOVNI NAČRT ZA VINOGRAD
(Utrinek iz zgodovine finančne matematike)

Rimski pisec Kolumela (Lucius Iunius Moderatus Columella) je bil rojen leta 4 v Španiji, umrl je okrog leta 70. Napisal je najobsežnejši in najpopolnejši rimski priročnik za kmetijstvo De Re Rustica. Oglejmo si poslovni načrt za vinograd v tretji knjigi (= poglavju) prej omenjenega dela [1, 2, 3].

Kolumela najprej pravi, da pridelovanje žit v Italiji ni posebno donosno: „V večjem delu Italije se komajda lahko spomnimo, da bi žito prineslo štirikratni pridelek . . . “

Zato svetuje preusmeritev v pridelovanje vina. Kolumela kot osnovno površinsko mero navaja *iugerum*, ki je meril 240 čevljev krat 120 čevljev in ga prevajam kot četrt hektara (kar se zelo dobro ujema s pravo vrednostjo). Prostorninska mera *meh (culleum) = 20 amfor = 40 urn* je vsebovala 524 litrov.

„Čeprav vinograd zahteva izredno velike izdatke, za sedem četrtin hektara ne potrebujemo več kot enega delavca. Ljudje mislijo, da lahko delavca kupijo za majhen denar ali s kamna, namenjenega (*na dražbi sužnjev, op. prev.*) zločincem. Sam se ne strinjam z večinskim mnenjem in mislim, da je dragocen vinogradniški delavec prioriteta. Denimo, da stane tak delavec šest, bolje osem tisoč sestercev in da z njim samim za enako vsoto kupimo še sedem četrtin hektara zemlje. Ocenjujem, da za doto vinograda, to je kole in vrbe, potrebujemo še dva tisoč sestercev na četrt hektara. Tako pridemo na skupno ceno 29 tisoč sestercev. K temu pridejo še obresti po 6 odstotkov, to je 3480 sestercev, za dve leti, ko je vinograd v svoji otroški dobi in ne prinaša pridelka. Tako glavnica in obresti znašajo 32 480 sestercev. Če bi posestnik do svojega vinograda imel tak odnos kot upnik do dolžnika in to vsoto imel za dolg, od katerega stalno pobira obresti po šest odstotkov, bi bilo videti, da mu vinograd vsako leto dolguje 1950 sestercev. Po računu, ki upošteva mnenje Grecina (*Iulius Graecinus je bil rimski senator in avtor priročnika o vinogradništvu, op. prev.*), pa pridelek na sedmih četrtinah hektara presega obresti na 32 480 sestercev. Vsekakor, četudi je vinograd najslabše vrste, pa skrbimo zanj, prinaša vsaj en meh vina na četrt hektara. Za štirideset urn dobimo 300 novcev (*novec = sesterec, op. prev.*), tudi pri minimalni ceni. Tako na sedem četrtin hektara pride 2100 novcev; to pa presega šestodstotno obrestno mero. In ta račun, ki smo ga predstavili, vsebuje Grecinovo sklepanje. Mi pa mislimo, da je treba vinograd, ki na četrt hektara prinaša manj kot tri mehove, izkrčiti. In pri tem računu tako rekoč nismo upoštevali grebenic, ki jih izkopljemo pri globokem oranju ... (*Kolumela tu razlaga, da vinograd uporablja še v en namen, in sicer za pridelovanje sadik, op. prev.*). Mi namreč med vrste posadimo po dvajset tisoč trsov na četrt hektara. In čeprav tisoči potaknjencev propadejo zaradi nemarnosti obdelovalca, vseeno deset tisoč trsov za tri tisoč sestercev z veseljem vzamejo zakupniki, ki so prepričani, da so pri tej kupčiji napravili dobiček.“

LITERATURA

[1] Kolumelova dela v latinščini: *LUCIUS IUNIUS MODERATUS COLUMELLA (4 A.D. – c. 70 A.D.)*, http://www.thelatinlibrary.com/columella.html .

[2] Kolumelova dela v latinščini in (deloma) angleščini: *Columella: Extant Works (De Re Rustica and De Arboribus)*, http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/columella/.

[3] J. Janick, *History of Horticulture, Lecture 19: Greek, Carthaginian, and Roman Agricultural Writers*, http://www.hort.purdue.edu/newcrop/history/lecture19/lec19.html .

Peter Legiša

VESTI

NOVI ČLANI DRUŠTVA V LETU 2008*

Lani se je v Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije včlanilo 30 novih članov:

2274. Aplinc Jure
2275. Bijec Emilija
2276. Brlogar Aljoša
2277. Dobnikar Jure
2278. Faletič Sergej
2279. Golob Anita
2280. Kavčič Matjaž
2281. Kraner Šumenjak Tadeja
2282. Lapuh Rado
2283. Lojevec Mrvič Vida
2284. Marovt Janko
2285. Mastnak Brigita
2286. Mele Irena
2287. Miklavčič Iztok
2288. Mozetič Sebastjan
2289. Pavlin Darko
2290. Peterson Bruce
2291. Pogačar Tina
2292. Pulko Lidija
2293. Rajh Sonja
2294. Rovšek Barbara
2295. Suhadolnik Marija
2296. Tepeh Horvat Aleksandra
2297. Topolovec Mojca
2298. Vilfan Mojca
2299. Vuk Martin
2300. Šemrl Melita
2301. Škufca Rok
2302. Šušteršič Miha
2303. Željko Lucija

Vladimir Bensa

*Novi člani DMFA Slovenije za leto 2007 so bili objavljeni v Obzorniku za matematiko in fiziko **55** (2008) 4, stran 128.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAJ 2009
Letnik 56, številka 3
ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Na Jakopičevem sprehajališču v parku Tivoli v Ljubljani je ob mednarodnem letu astronomije do 4. septembra 2009 na ogled razstava astronomskih fotografij „Od Zemlje do vesolja“ (foto: Andrej Guštin).