IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2013
Letnik 60
5

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Die Siebenteilung des Kreises.

Von **Josef Plemelj** in Czernowitz.

Es ist theoretisch längst bekannt, daß die Siebenteilung des Kreises durch Dreiteilung eines Winkels ausführbar ist. Die folgende geometrische Konstruktion ist nebst der Einfachheit besonders durch den Umstand bemerkenswert, daß sie die alte Regel von Abûl Wafâ Mohamed (940—998), die später unter dem Namen „indische Regel“ allgemein bekannt war, als die natürlichste Näherung zur wahren Geltung bringt.

Bekanntlich hängt die Siebenteilung des Kreises von der Lösung der Gleichung $\frac{x^7-1}{x-1}=0$ ab. Die Wurzeln dieser Gleichung sind $e^{\varkappa\frac{2\pi}{7}i}$, wo $\varkappa=1,2,3\ldots6$ zu setzen ist. Es werde die Wurzel $e^{\frac{6}{7}\pi i}=-e^{-\frac{\pi}{7}i}$ mit ζ bezeichnet, d. h. $\zeta=-e^{-\frac{\pi}{7}i}$. Die Größen $\zeta+\zeta^{-1}, \zeta^2+\zeta^{-2}, \zeta^4+\zeta^{-4}$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$y^3+y^2-2y-1=0. \tag{1}$$

Die Seite s_7 des Siebenecks ist im Einheitskreis gleich $2\sin\frac{\pi}{7}$, d. h. es ist $s_7=i(\zeta^{-1}-\zeta)$. Nun ist deshalb $s_7^2=2-(\zeta^2+\zeta^{-2})$. Weil aber $\zeta^2+\zeta^{-2}$ eine Wurzel von (1) ist, so folgt daraus, daß durch Substitution von $s^2=2-y$ oder $y=2-s^2$ in die Gleichung (1) für s eine Gleichung hervorgeht, der die Seite des Siebenecks genügt. Aus dem Umstand, daß 1, 2, 4 die quadratischen Reste, $-1, -2, -4$ aber die Nichtreste (mod 7) sind, erkennt man sofort, daß die Gleichung sechsten Grades durch Adjunktion einer Quadratwurzel in zwei kubische Gleichungen zerfallen muß, deren eine die Wurzeln $i(\zeta-\zeta^{-1})$, $i(\zeta^2-\zeta^{-2})$, $i(\zeta^4-\zeta^{-4})$ haben wird, die andere genau die entgegengesetzten. In der Tat liefert die einfache Substitution von $y=2-s^2$ in (1) die Gleichung $s^6-7s^4+14s^2-7=0$, welche augenscheinlich in die beiden Gleichungen sich spaltet:

$$s^3\pm\sqrt{7}(s^2-1)=0. \tag{2}$$

Die Gleichung (2) ist durch die Cardanosche Formel sofort lösbar, wenn man sie schreibt:

$$\left(\frac{1}{s}\right)^3-\left(\frac{1}{s}\right)=\pm\frac{1}{\sqrt{7}}.$$

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2013, letnik 60, številka 5, strani 161–200

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 21 EUR, za druge družinske člane in študente pa 10,50 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

JOSIP PLEMELJ IN PRAVILNI SEDEMKOTNIK

MILAN HLADNIK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 12F05, 97G40

Plemljev pristop h konstrukciji (stranice) pravilnega sedemkotnika zahteva nekaj predhodne matematične razlage. Ogledali si bomo tudi rahlo dopolnitev in dve novejši varianti Plemljeve ideje.

JOSIP PLEMELJ AND REGULAR HEPTAGON

Plemelj's approach to the construction of (the side of) the regular heptagon requires some preliminary mathematical explanations. Also a slight addition and two recent variations of Plemelj's idea will be given.

Leta 1892 je devetnajstletni Josip Plemelj, čigar okroglo obletnico (sto štirideset let) praznujemo letos, odkril preprosto konstrukcijo pravilnega sedemkotnika, temelječo na tretjinjenju kota. Objavil jo je sicer šele pred dobrimi sto leti, leta 1912, v nemščini v časopisu *Monatshefte für Mathematik und Physik* [7], leta 1954 pa so jo v slovenskem prevodu Nika Prijatelja v *Obzorniku* [8] lahko spoznali tudi slovenski bralci. Njegova metoda še danes velja za eno najbolj elegantnih in najbolj pogosto citiranih konstrukcij tega lika (glej npr. [1, 3, 4, 5, 6]).

V tem sestavku si bomo ogledali Plemljev pristop k problemu razdelitve krožnice na sedem enakih delov. Privoščili si bomo majhno dopolnitev Plemljeve rešitve, da bomo poleg stranice dobili tudi obe sedemkotnikovi diagonali. Spoznali bomo tudi dve novejši, na Plemljevi ideji sloneči sorodni konstrukciji (oglišč) pravilnega sedemkotnika (prvo je prispeval Andrew M. Gleason, drugo John H. Conway). Na kratko bomo predstavili širši teoretični okvir o možnih konstrukcijah pravilnih večkotnikov.

Najprej na kratko ponovimo nekaj znanih dejstev o geometrijskih konstrukcijah z evklidskim (in izpopolnjenim) orodjem, posebej o konstrukcijah pravilnih večkotnikov. Pri tem je pomembno, katere realne korene kubičnih enačb z racionalnimi koeficienti znamo konstruirati z izbranim orodjem.

Splošno o konstrukciji z ravnilom in šestilom

Znano je, da lahko točko (x, y) v koordinatnem sistemu konstruiramo z (neoznačenim) ravnilom in šestilom natanko takrat, ko se dasta njeni koordinati x in y, izhajajoč iz enote 1, izračunati s štirimi osnovnimi računskimi operacijami in z (večkratno) uporabo kvadratnega korena (glej npr. [10]). Bolj učeno to izrazimo z zahtevo, da morata pripadati koordinati x, y večkratni kvadratni razširitvi obsega racionalnih števil $F_k = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, ..., \sqrt{d_k})$, ki jo dobimo postopoma z zaporednimi enostavnimi kvadratnimi razširitvami $\mathbb{Q} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_k$, tako da za vsak $i = 1, 2, ..., k$ obsegu F_{i-1} dodamo kvadratni koren iz nekega pozitivnega nekvadratnega elementa $d_i \in F_{i-1}$, torej $F_i = F_{i-1}(\sqrt{d_i})$; vsak element v F_i je oblike $p + q\sqrt{d_i}$ s $p, q \in F_{i-1}$ (glej npr. [6], pogl. 1, ali [9], razdelek 5.6). Ravninski kot pa lahko konstruiramo, kadar zmoremo konstruirati njegov kosinus (ali sinus).

Naslednja trditev opisuje prepreko za konstrukcijo korenov kubičnih enačb samo z ravnilom in šestilom.

Trditev 1. *Če kubična enačba z racionalnimi koeficienti nima racionalnega korena, nobenega njenega korena ne moremo konstruirati samo z ravnilom in šestilom.*

Dokaz. Denimo, da so $a, b, c \in \mathbb{Q}$ in da enačba $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ nima racionalnih korenov (da je torej, kot rečemo, nerazcepna nad obsegom racionalnih števil $\mathbb{Q}$), ima pa koren, ki ga je mogoče konstruirati z ravnilom in šestilom. Kot prej označimo $F_0 = \mathbb{Q}$ in $F_k = \mathbb{Q}(\sqrt{d_1}, \sqrt{d_2}, \ldots, \sqrt{d_k})$, pri čemer naj bo F_k najmanjša večkratna kvadratna razširitev obsega racionalnih števil, ki vsebuje tak konstruktibilen koren. Ta koren je torej oblike $p + q\sqrt{d_k}$, kjer je $p, q \in F_{k-1}$ in $q \neq 0$, sicer bi bil koren že v F_{k-1}. Če vstavimo koren $p + q\sqrt{d_k}$ v enačbo in poračunamo, dobimo

$$(p^3 + 3pq^2 d_k + ap^2 + aq^2 d_k + bp + c) + (3p^2 q + q^3 d_k + 2apq + bq)\sqrt{d_k} = 0.$$

Od tod vidimo, da morata biti oba oklepaja enaka nič. Če vstavimo tudi $p - q\sqrt{d_k}$, dobimo podoben izraz, le da je med obema oklepajema minus. To pa pomeni, da je tudi $p - q\sqrt{d_k}$ koren iste enačbe (različen od $p + q\sqrt{d_k}$ zaradi $q \neq 0$). Naj bo r tretji koren iste kubične enačbe, tako da imamo razcep

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (x - r)(x - p - q\sqrt{d_k})(x - p + q\sqrt{d_k}) \\ &= (x - r)(x^2 - 2px + p^2 - q^2 d_k). \end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov pri potenci x^2 ugotovimo, da mora biti $a = -r - 2p$ oziroma $r = -a - 2p$. Koren r, ki po predpostavki ni racionalen, leži torej v F_{k-1}, zato ga lahko konstruiramo z ravnilom in šestilom. To pa je v nasprotju s privzetkom, da je F_k najmanjša kvadratna razširitev obsega $\mathbb{Q}$, v kateri tak koren obstaja. ∎

Zgled 1. Ker se z uporabo formule za trojni kot lahko takoj prepričamo, da je en koren enačbe $x^3 - 3x - 1 = 0$, ki očitno ne premore nobene racionalne rešitve, enak $2\cos(\pi/9)$ (druga dva sta $2\cos(5\pi/9)$ in $2\cos(7\pi/9)$), iz trditve 1 vidimo, da z ravnilom in šestilom ne moremo načrtati števila $2\cos(\pi/9)$, torej tudi ne tretjiniti kota $\pi/3$. Prav tako ne moremo z ravnilom in šestilom načrtati $\sqrt[3]{2}$, ki zadošča enačbi $x^3 - 2 = 0$ brez racionalnih korenov.

Zgled 2. Podobno lahko pokažemo, da tudi konstrukcija pravilnega sedemkotnika z evklidskim orodjem ni možna. Če namreč ležijo oglišča pravilnega sedemkotnika na enotski krožnici s središčem v koordinatnem izhodišču, jih lahko predstavimo v kompleksnem kot rešitve enačbe $z^7 - 1 = 0$. Ena od rešitev je 1, druge pa zadoščajo simetrični enačbi šeste stopnje $z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Takoj lahko preverimo naslednje: če kompleksno število z reši to enačbo, potem realno število $x = z + 1/z$ reši enačbo tretje stopnje $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, ki nima racionalnih rešitev. Zato nobenega njenega korena ne moremo konstruirati samo z ravnilom in šestilom, tudi ne števila $x = 2\cos(2\pi/7)$, ki določa točki (1,0) najbližje oglišče pravilnega sedemkotnika (v prvem kvadrantu) oziroma kompleksni koren $z = e^{2\pi i/7}$ prvotne enačbe $z^7 - 1 = 0$ z realnim delom $x/2$.

Kot dopolnilo zadnjemu zgledu povejmo, da je problem konstrukcije pravilnih večkotnikov z ravnilom in šestilom že zelo dolgo rešen. Osnovni izrek s tem v zvezi pravi (primerjaj npr. [6]):

Izrek 2 (Gauss-Wantzel). *Pravilni n-kotnik lahko konstruiramo z ravnilom in šestilom (tj. z evklidskim orodjem) natanko takrat, ko je naravno število n oblike $n = 2^m p_1 p_2 \dots p_k$, kjer je $m, k \geq 0$ (pri $k = 0$ mora biti $m \geq 2$) in so p_i, $i = 1, 2, ..., k$, različna Fermatova praštevila, tj. praštevila, ki so za ena večja od potence števila 2.*

Zadostnost je ugotovil Carl Friedrich Gauss (1777–1855) v svoji razpravi *Disquisitiones Arithmeticae* leta 1801. V njej je tudi navedel, da enaka konstrukcija drugih pravilnih večkotnikov ni možna, korekten dokaz tega dejstva pa je leta 1837 objavil francoski matematik Pierre Laurent Wantzel (1814–1848). Wantzel je tudi prvi dokazal, da tretjinjenje poljubnega kota in podvojitev kocke iz zgleda 1 nista možna. Ker (za zdaj) poznamo samo pet Fermatovih praštevil, namreč $3, 5, 17, 257$ in 65537, lahko (za zdaj) z evklidskim orodjem konstruiramo samo pet pravilnih večkotnikov s praštevilsko stranico, od vseh n-kotnikov pa npr. tiste, kjer je $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51$ itd. Vidimo, da pravilnega sedemkotnika ni med njimi.

Geometrijsko reševanje kubične enačbe

Potem ko smo v trditvi 1 spoznali, da z evklidskim orodjem uspemo le v zelo posebnih primerih, si oglejmo, kako bi sploh lahko geometrijsko konstruirali realno rešitev enačbe tretje stopnje z racionalnimi koeficienti.

Splošno kubično enačbo $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, kjer je $a \neq 0$, lahko s substitucijo $x = t - b/(3a)$ vedno prevedemo v obliko

$$t^3 - 3pt + 2q = 0. \tag{1}$$

Izrek 3 (Cardano). *Vse tri rešitve enačbe $t^3 - 3pt + 2q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$, lahko zapišemo v obliki*

$$t_0 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}, \tag{2}$$

$$t_1 = \omega \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \omega^2 \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}, \quad t_2 = \omega^2 \sqrt[3]{-q + \sqrt{D}} + \omega \sqrt[3]{-q - \sqrt{D}}, \tag{3}$$

kjer je $D = q^2 - p^3$ in $\omega = e^{2\pi i/3}$ tretji koren enote[1]*. Pri tem moramo tretja korena, ki nastopata v zgornjih formulah, izbrati tako, da je njun produkt enak p.*

Kadar je $D > 0$, je rešitev (2) realna ($\bar{t}_0 = t_0$), rešitvi (3) pa konjugirano kompleksni ($\bar{t}_1 = t_2$). Pri $D = 0$ in $p, q \neq 0$ imamo enojni koren $-2q/p$ in dvojni koren q/p, saj lahko zapišemo

$$t^3 - 3pt + 2q = (t + 2q/p)(t - q/p)^2.$$

Pri $D = 0$ in $p = q = 0$ obstaja seveda en sam trojni koren, ki je enak nič.

Najbolj zanimiva je situacija, ko je $D < 0$ (in mora zato biti $p > 0$). Tedaj ima enačba $t^3 - 3pt + 2q = 0$ tri realne rešitve, ki pa se po Cardanovih formulah izražajo s tretjimi koreni iz kompleksnih števil $-q \pm i\sqrt{-D}$. Kadar enačba (1) nima racionalnih korenov, se kompleksnim številom ne moremo izogniti in izvesti vse račune samo v realnem, zato tako situacijo tradicionalno imenujemo (po latinsko) *casus irreducibilis*, čeprav je enačba (1) seveda razcepna nad $\mathbb{R}$. Da dobimo tretji koren iz kompleksnega števila, pa je treba izračunati (realni) tretji koren iz njegove absolutne vrednosti, v danem primeru torej $\sqrt[3]{|-q \pm i\sqrt{-D}|} = \sqrt[6]{q^2 - D} = \sqrt[6]{p^3} = \sqrt{p}$, in tretjiniti njegov argument. Iz tega vidimo, da je nerazcepni primer kubične enačbe nujno povezan s tretjinjenjem kota.

[1] Izraz $-108D$, ki je enak $(t_0 - t_1)^2(t_0 - t_2)^2(t_1 - t_2)^2$, imenujemo *determinanta* enačbe (1).

V nerazcepnem primeru lahko v enačbi (1) neznanko izrazimo s kosinusom nekega kota: $t = 2\sqrt{p}\cos\theta$ in dobimo $p\sqrt{p}(4\cos^3\theta - 3\cos\theta) + q = 0$ oziroma $\cos 3\theta = -q/(p\sqrt{p})$. Tu je namreč zaradi zahteve $D = q^2 - p^3 < 0$ desna stran po absolutni vrednosti pod 1, zato tak kot 3θ obstaja. Če ga znamo tretjiniti, dobimo θ in s tem eno rešitev $t_0 = 2\sqrt{p}\cos\theta$; drugi dve dobimo, če kotu θ prištejemo ali odštejemo $2\pi/3$.

Denimo zdaj, da so koeficienti a, b, c, d prvotne kubične enačbe racionalni. Potem sta racionalna tudi koeficienta p in q izpeljane enačbe (1) in ju znamo konstruirati z ravnilom in šestilom, kakor hitro izberemo enoto. Predpostavimo, da je $D = q^2 - p^3 < 0$. Rešitve lahko v tem primeru dobimo geometrijsko, vendar moramo, kot smo videli, poleg ravnila in šestila uporabiti tudi eno od naprav za tretjinjenje kota (na kratko *kotni trisektor*), saj samo z evklidskim orodjem konstrukcija v splošnem ni možna (glej trditev 1).

Naj ob tem pripomnimo, da ta metoda deluje samo tedaj, ko ima kubična enačba (1) vse tri korene realne. Vedno namreč dobimo tri kote, če že najdemo enega. Če bi npr. hoteli izračunati $\sqrt[3]{2}$ kot pri podvojitvi kocke, nam uvedba trigonometrične funkcije ne bi pomagala, ker ima enačba $x^3 - 2 = 0$ le en realni koren. Povzemimo:

Trditev 4. *Kubično enačbo z racionalnimi koeficienti lahko rešimo geometrijsko z uporabo ravnila, šestila in kotnega trisektorja natanko takrat, ko ima vse tri korene realne.*

Pri enačbi (1) je torej to res natanko takrat, ko je $D = q^2 - p^3 \leq 0$ oziroma $p^3 \geq q^2$. Za geometrijsko konstrukcijo tretjega korena iz realnega števila ali, bolj splošno, korena kubične enačbe (1) tedaj, ko je $D > 0$, je treba uporabiti druge metode.

Plemljeva konstrukcija pravilnega sedemkotnika

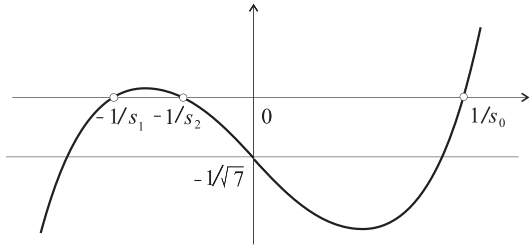
Vprašajmo se, ali lahko konstruiramo stranico pravilnega sedemkotnika $s = 2\sin(\pi/7)$, če poleg ravnila in šestila kot legitimno metodo dopustimo tudi tretjinjenje kota. Odgovor je pritrdilen.

Trditev 5. *Stranica pravilnega sedemkotnika je enaka* $s_0 = 1/t_0$*, kjer je* $t_0 = (2/\sqrt{3})\cos\theta$ *in* $\cos 3\theta = 3\sqrt{3}/(2\sqrt{7})$ *oziroma* $tg\, 3\theta = 1/(3\sqrt{3})$. Poleg tega sta mala in velika diagonala, s_1 in s_2, enaki $s_1 = -1/t_1$, $s_2 = -1/t_2$, kjer je $t_1 = (2/\sqrt{3})\cos(\theta + 2\pi/3)$ in $t_2 = (2/\sqrt{3})\cos(\theta - 2\pi/3)$.

Dokaz. Spoznali smo že, da število $x = 2\cos(2\pi/7)$ reši kubično enačbo

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0. \tag{4}$$

Ker je $x = 2(1 - 2\sin^2(\pi/7)) = 2 - s^2$, vidimo, da stranica pravilnega sedemkotnika zadošča enačbi $(2 - y^2)^3 + (2 - y^2)^2 - 2(2 - y^2) - 1 = 0$ oziroma enačbi $y^6 - 7y^4 + 14y^2 - 7 = 0$. To enačbo šeste stopnje lahko zapišemo tudi v obliki $y^6 - 7(y^2 - 1)^2 = 0$, zato razpade v dve kubični enačbi: $y^3 - \sqrt{7}(y^2 - 1) = 0$ in $y^3 + \sqrt{7}(y^2 - 1) = 0$. S substitucijo $t = 1/y$ in odpravo ulomkov dobimo lepši enačbi tretjega reda: $t^3 - t - 1/\sqrt{7} = 0$ in $t^3 - t + 1/\sqrt{7} = 0$. Dovolj je obravnavati samo prvo enačbo, saj dobimo drugo iz nje z zamenjavo $t \to -t$.

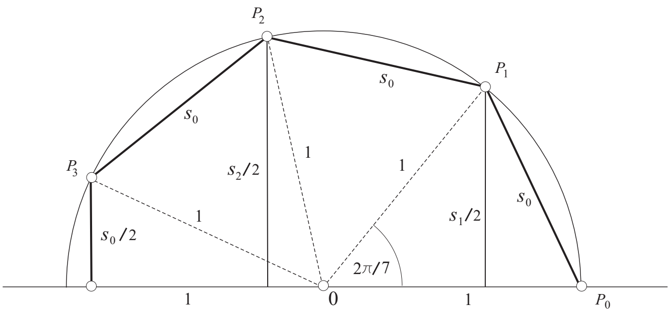


Slika 1. Graf funkcije $f(t) = t^3 - t - 1/\sqrt{7}$ z označenimi ničlami.

Kot pokaže enostavna analiza (glej sliko 1), ima enačba

$$t^3 - t - 1/\sqrt{7} = 0 \tag{5}$$

en pozitiven koren, enak ravno recipročni vrednosti stranice pravilnega sedemkotnika, tj. $t_0 = 1/s_0$, in dva negativna korena, enaka $t_1 = -1/s_1$ in $t_2 = -1/s_2$, kjer je $s_1 = 2\sin(2\pi/7)$ in $s_2 = 2\sin(3\pi/7) = 2\sin(4\pi/7)$, kar spoznamo enako kot za s_0. Iz slike 2 vidimo, da pomeni s_1 krajšo in s_2 daljšo diagonalo sedemkotnika.



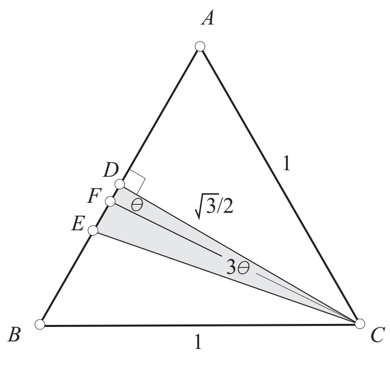
Slika 2. Zgornja polovica v enotski krog včrtanega pravilnega sedemkotnika.

Vsekakor ima enačba $t^3 - t - 1/\sqrt{7} = 0$ vse tri korene realne in je tudi oblike $t^3 - 3pt + 2q = 0$, ki smo jo obravnavali v drugem razdelku. V našem primeru je $p = 1/3$ in $q = -1/(2\sqrt{7})$, tako da je $D = q^2 - p^3 = 1/28 - 1/27 = -1/(28 \cdot 27) < 0$. Če torej pišemo $t = (2/\sqrt{3})\cos\theta$, dobimo enakost $\cos 3\theta = 3\sqrt{3}/(2\sqrt{7}) = \sqrt{27/28}$ oziroma $\operatorname{tg} 3\theta = 1/(3\sqrt{3})$. Ko iz ene od zadnjih dveh enačb izračunamo kot θ med 0 in $\pi/2$, dobimo z njim izraženo tudi stranico pravilnega sedemkotnika: $s_0 = 1/t_0 = \sqrt{3}/(2\cos\theta)$. Preostala dva (negativna) korena enačbe (5) dobimo seveda v obliki $t_1 = (2/\sqrt{3})\cos(\theta + 2\pi/3)$ oziroma $t_2 = (2/\sqrt{3})\cos(\theta - 2\pi/3)$, od koder brez težav izrazimo s kotom θ tudi diagonali s_1 in s_2. ∎

Mimogrede: kot θ je majhen, enak približno $3°37'52''$; stranica sedemkotnika, včrtanega v enotski krog, znaša približno 0,8677675, krajša diagonala 1,5636630 in daljša 1,9498558.

Plemelj je na tem dejstvu zgradil svojo elegantno rešitev [8] (glej sliko 3):

Izrek 6 (Plemelj). *V enakostraničnem trikotniku ABC naj točka D razpolavlja, točka E pa tretjini stranico AB. Nadalje naj bo točka F na daljici DE taka, da je kot $\angle DCF$ enak tretjini kota $\angle DCE$. Potem je CF stranica pravilnega sedemkotnika, ki je včrtan enotski krožnici.*



Slika 3. Plemljeva konstrukcija stranice pravilnega sedemkotnika.

Dokaz. Stranica osnovnega enakostraničnega trikotnika $\triangle ABC$ naj bo dolžine 1, tako da ima pravokotni trikotnik $\triangle CDE$ eno kateto, CD, enako višini enakostraničnega trikotnika, torej dolžine $\sqrt{3}/2$, drugo, DE, ki leži na stranici AB, pa dolžine $1/2 - 1/3 = 1/6$. Kot pri C v tem trikotniku označimo s 3θ in takoj ugotovimo, da je $\operatorname{tg} 3\theta = 1/(3\sqrt{3})$. Poleg tega je dolžina hipotenuze CF v novem trikotniku $\triangle CDF$ enaka $\sqrt{3}/(2\cos\theta)$, torej ravno stranica pravilnega sedemkotnika, ki ga lahko včrtamo v krog s polmerom 1 (glej trditev 5). ∎

To je Plemljeva eksaktna konstrukcija (stranice) pravilnega sedemkotnika. Pri njej očitno potrebujemo tretjinjenje nekega kota (od prej vemo, da zgolj evklidsko orodje ne zadošča), namreč kota $\angle DCE$.

Plemelj je v originalnem članku [7] (glej npr. slovenski prevod [8]) navedel tudi približno rešitev, ko namesto tretjinjenja kota pri C v pravokotnem trikotniku CDE tretjinimo kar kateto DE. Tedaj dobimo nekoliko večjo vrednost za stranico pravilnega sedemkotnika; napaka pri tem približku je (pri krogu s polmerom 1 m) samo 0,038 mm. Še bolj preprosto približno rešitev pa dobimo, če za stranico pravilnega sedemkotnika namesto hipotenuze pravokotnega trikotnika CDF izberemo kar njegovo kateto CD, tj. višino prvotnega enakostraničnega trikotnika ABC. Ta približek, imenovan tudi *indijski*, je že v 1. stoletju našega štetja poznal Heron iz Aleksandrije ($\sim$ 10–70), za njim pa v 10. stoletju Abul Wafa (940–998), poslednji veliki bagdadski matematik in astronom; slednjega mimogrede omenja tudi Plemelj v svojem članku. Konec 15. in v začetku 16. stoletja sta enak približek uporabljala npr. Leonardo da Vinci (1452–1519) in Albrecht Dürer (1471–1528) v svojih študijah o upodabljanju pravilnih likov.

Dopolnitve in sorodne konstrukcije

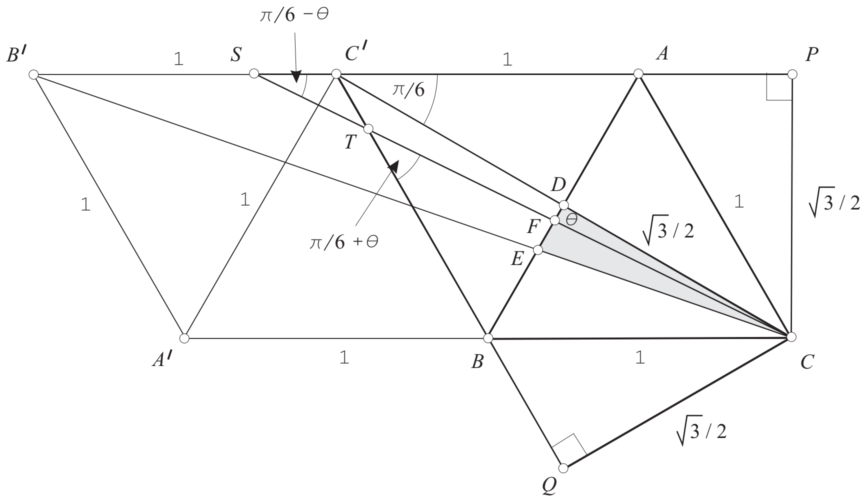
Ko že poznamo daljico, ki predstavlja stranico v enotski krog včrtanega pravilnega sedemkotnika, jo seveda lahko nanesemo na ustrezno krožnico, in dobimo še druga oglišča sedemkotnika. Zanimivo pa je, da lahko s preprosto dopolnitvijo Plemljeve konstrukcije najdemo tudi dolžini obeh sedemkotnikovih diagonal. To je ugotovil in leta 1988 objavil znani ameriški matematik Andrew M. Gleason[2] (1921–2008). Oglejmo si njegov prispevek [3].

Gleasonova dopolnitev Plemljeve konstrukcije

Najprej s preprostim računom iz enakosti $1/s_1 = -t_1 = -(2/\sqrt{3})\cos(\theta + 2\pi/3) = (2/\sqrt{3})\sin(\pi/6+\theta)$ ugotovimo, da velja $s_1 \sin(\pi/6+\theta) = \sqrt{3}/2$. Iz enakosti $1/s_2 = -t_2 = -(2/\sqrt{3})\cos(\theta - 2\pi/3) = (2/\sqrt{3})\sin(\pi/6-\theta)$ pa dobimo podobno $s_2 \sin(\pi/6-\theta) = \sqrt{3}/2$.

Dopolnimo zdaj Plemljevo konstrukcijo tako, da osnovnemu enakostraničnemu trikotniku ABC dodamo še tri skladne enakostranične trikotnike

[2]Gleason je celo svojo akademsko kariero preživel kot profesor matematike in naravne filozofije na Harvardu, čeprav ni nikoli formalno doktoriral. Ukvarjal se je s funkcionalno analizo, kvantno mehaniko, kombinatoriko in s teorijo in prakso kodiranja ter k tem področjem veliko prispeval. Slaven je postal, ko je leta 1952 dokazal, da je vsaka lokalno evklidska topološka grupa Liejeva (in s tem delno rešil peti Hilbertov problem). Zanimal se je tudi za pouk matematike, pisal učbenike in sodeloval pri reformi matematičnega izobraževanja v ZDA.



Slika 4. Dopolnjena Plemljeva konstrukcija stranice in obeh diagonal pravilnega sedemkotnika.

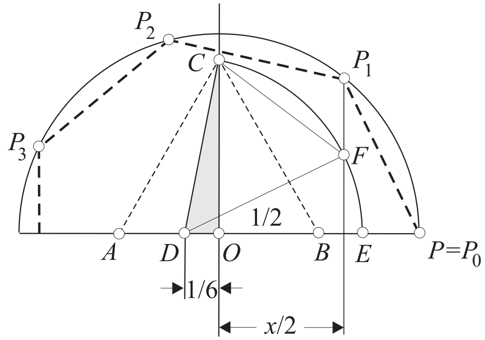
$AC'B$, $A'BC'$ in $A'C'B'$, ki imajo po eno stranico skupno, tako kot kaže slika 4.

S podaljšanjem daljic CD in CE pridemo do točk C' oziroma B', pri čemer je $CC' = 2CD$ in $CB' = 3CE$. Podaljšajmo še daljico CF, tako da seka stranico $B'C'$ v točki S in stranico BC' v točki T. Obenem naj bo P pravokotna projekcija točke C na podaljšek daljice AC' in Q pravokotna projekcija točke C na podaljšek daljice BC'. Potem se lahko hitro prepričamo, da je v pravokotnem trikotniku $\triangle CPS$ kot pri S enak $\pi/6 - \theta$ in v pravokotnem trikotniku $\triangle CTQ$ kot pri T enak $\pi/6+\theta$. Ker je dolžina stranic CP in CQ enaka $\sqrt{3}/2$ (višina enakostraničnega trikotnika), spoznamo iz primerjave s prej dobljenima enačbama, da je $s_1 = CT$ in $s_2 = CS$.

Gleasonova konstrukcija pravilnega sedemkotnika

Za primerjavo predstavimo še konkretno konstrukcijo pravilnega sedemkotnika, ki jo navaja Gleason v [3]. Pravzaprav bomo zaradi preglednosti narisali le polovico njegove risbe, šestkrat zmanjšali skalo, da bomo dobili enotsko krožnico, in spremenili oznake oglišč, da bodo bolj podobne tistim na sliki 2.

Začnimo s polkrožnico polmera 1, ki ima središče O v koordinatnem izhodišču. Naj bo $A = (-1/2, 0)$, $B = (1/2, 0)$ in $P = (1, 0)$ (glej sliko 5). Potem je točka $C = (0, \sqrt{3}/2)$ tretje oglišče enakostraničnega trikotnika $\triangle ABC$. Konstruirajmo še krožni lok s središčem v točki $D = (-1/6, 0)$ od točke C do presečišča E z daljico OP in na njem izberimo točko F tako, da je kot $\angle PDF$ ravno tretjina kota $\angle PDC$. Navpičnica skozi F potem seka prvotno polkrožnico v točki P_1, ki je točki $P = P_0$ najbližje oglišče pravilnega sedemkotnika. Njegova stranica je daljica P_0P_1.



Slika 5. Gleasonova konstrukcija pravilnega sedemkotnika s tretjinjenjem kota.

Dokažimo, da je ta konstrukcija pravilna. Označimo kot $\angle PDF$ s črko ϕ, tako da je potem $\angle PDC = 3\phi$ in zato $\cos 3\phi = 1/(2\sqrt{7})$ oziroma $4\cos^3\phi - 3\cos\phi = 1/(2\sqrt{7})$. Poleg tega naj pomeni $x/2$ razdaljo od točke O do navpičnice skozi F, tako da je $\cos\phi = (1/6 + x/2)/(2\sqrt{7}/6) = (1 + 3x)/(2\sqrt{7})$, kar nam omogoča, da iz prejšnje enačbe izločimo kot ϕ. Z računom preverimo, da zadošča x enačbi (4), se pravi, da je $x = 2\cos(2\pi/7)$, kar je edina pozitivna rešitev enačbe (4).

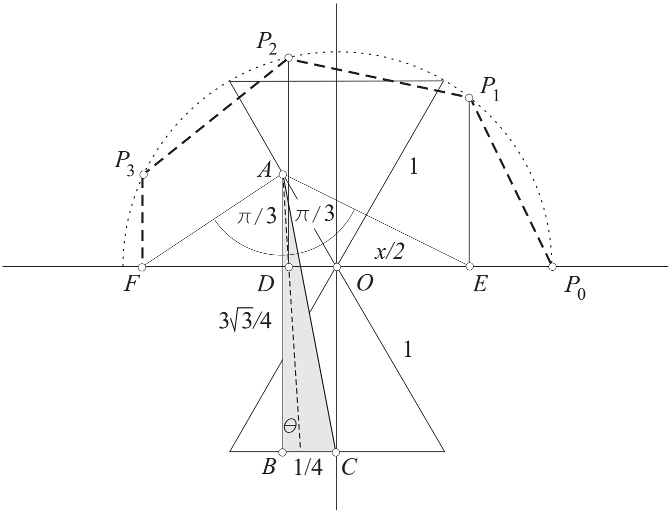
Primerjajmo trikotnik $\triangle CDO$ na sliki 5 s Plemljevim trikotnikom $\triangle CDE$ na sliki 3, pa vidimo, da je $3\phi = \pi/2 - 3\theta$. Bralcu prepuščamo, da se sam odloči, čigava konstrukcija, Plemljeva ali Gleasonova, je bolj elegantna. Prva nam da stranico, druga pa celo oglišča pravilnega sedemkotnika.

Conwayeva konstrukcija pravilnega sedemkotnika

Plemljev trikotnik je uporabil tudi John H. Conway[3] pri svoji konstrukciji pravilnega sedemkotnika, ki jo povzemamo po [2].

Dva skladna enakostranična trikotnika s stranico 1 staknimo skupaj v oglišču O tako, kot kaže slika 6, in ju razpolovimo z navpičnico skozi stičišče. Razpolovišče leve stranice zgornjega trikotnika označimo z A, navpičnica skozi A naj seka spodnjo osnovnico v točki B, razpolovišče osnovnice

[3] John Horton Conway (rojen leta 1937) je znameniti angleški in ameriški matematik (od leta 1986 je profesor na univerzi v Princetonu, prej pa je bil profesor v angleškem Cambridgeu). Deluje na različnih področjih algebre, geometrije, teorije števil, diskretne in razvedrilne matematike. Odkril je številne nove matematične koncepte, uvedel nove algoritme in igre, največjo popularnost pa je pridobil z iznajdbo celičnega avtomata, imenovanega *Igra življenja*.



Slika 6. Conwayeva konstrukcija pravilnega sedemkotnika.

spodnjega trikotnika pa naj bo C. Potem je trikotnik $\triangle ABC$ podoben Plemljevemu trikotniku $\triangle CDE$ na sliki 3 (povečan je s faktorjem $3/2$) s kotom $\angle BAC = 3\theta$, saj je $\operatorname{tg} 3\theta = 1/(3\sqrt{3})$. Tretjino tega kota v smeri od B proti C, tj. Plemljev kot θ, naj poleg navpičnice omejuje daljica AD. Od daljice AD odmerimo na vsako stran kot velikosti $\pi/3$ z vrhom v A. Oba nova kraka naj sekata vodoravnico skozi O v točkah E in F. Potem navpičnice skozi točke D, E, F sekajo enotsko krožnico s središčem v O v ogliščih pravilnega sedemkotnika (glej sliko 6).

Dokaz pravilnosti te konstrukcije je računski. Če označimo z $x/2$ razdaljo OE, vidimo, da je $x/2 + 1/4 = (\sqrt{3}/4)\operatorname{tg}(\theta + \pi/3)$. Z adicijskim izrekom za tangens dobimo od tod $\sqrt{3}\operatorname{tg}\theta = (x-1)/(x+1)$. Po drugi strani iz formule za tangens trojnega kota in dejstva, da je $\operatorname{tg} 3\theta = 1/(3\sqrt{3})$, najdemo enakost $1 - 3\operatorname{tg}^2\theta = 3\sqrt{3}(3\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}^3\theta)$. Izrazimo tangens z x, pa dobimo po preureditvi zvezo $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, torej spet znano enačbo (4). Od tod vidimo, da je $x = 2\cos(2\pi/7)$.

Podobno kot Gleasonova nam tudi Conwayeva metoda da oglišča v enotski krog včrtanega pravilnega sedemkotnika.

Splošna teorija konstrukcij pravilnih večkotnikov s tretjinjenjem kota

Za konec omenimo, da velja podobno kot za konstrukcijo z evklidskim orodjem bolj splošna teorija tudi za konstrukcijo poljubnega pravilnega večkotnika z uporabo ravnila, šestila in trisektorja. Ustrezni izrek je že leta 1895 v časopisu *Bulletin of the American Mathematical Society* prispeval ameriški matematik James Pierpont[4] (1866–1938), profesor na univerzi Yale. Dokaz je podoben dokazu izreka 2 in prav tako poteka z uporabo Galoisove teorije obsegov (glej [3]). Pravzaprav je Pierpont namesto kotnega trisektorja uporabil metodo stožnic, vendar je Gleason dokazal ekvivalenco obeh orodij za namen konstrukcije pravilnega večkotnika, zato Pierpontov izrek formulirajmo kar v Gleasonovi obliki (s tretjinjenjem kota).

Izrek 7 (Pierpont-Gleason). *Pravilni n-kotnik lahko konstruiramo z ravnilom, šestilom in kotnim trisektorjem natanko takrat, ko je $n = 2^r 3^s p_1 p_2 \dots p_k$, kjer so $r, s, k \geq 0$ (pri $k = 0$ je $n = 2^r 3^s$ in $r/2 + s \geq 1$) in so $p_i > 3$, $i = 1, 2, \dots, k$, različna praštevila oblike $p = 2^u 3^v + 1$, $u, v \geq 0$.*

Praštevila zgornje oblike imenujemo *Pierpontova praštevila* (Gleasonova domneva, da jih je neskončno mnogo, še ni dokazana). Mednje spadajo (poleg Fermatovih praštevil) praštevila 7, 13, 19, 37, 73, 97 itd., ne pa npr. 11, 23, 29, 31, 41, 43 ali 47. Vidimo, da pravilni sedemkotnik zadošča Pierpontovemu pogoju ($7 = 2 \cdot 3 + 1$), enako trinajstkotnik ($13 = 2^2 \cdot 3 + 1$), ne pa npr. pravilni enajstkotnik. Slednjega torej ni mogoče konstruirati samo z ravnilom, šestilom in trisektorjem. Pogojem izreka 7 pa zadoščajo (poleg tistih, omenjenih že v zvezi z izrekom 2) npr. tudi naslednja sestavljena števila: 9, 14, 18, 20, 21, 26, 28, 35, 36, 38, 39, 42, 45, 52 itd.

LITERATURA

[1] L. Bieberbach, *Theorie der geometrischen Konstruktionen*, Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften, Mathematische Reihe, bd. 13, Verlag Birkhäuser, Basel 1952.

[2] J. H. Conway, R. K. Guy, *Numbers*, Copernicus Springer-Verlag, New York 1996.

[3] A. M. Gleason, *Angle Trisection, the Heptagon, and the Triskaidecagon*, Amer. Math. Monthly **95** (1988), 185–194.

[4] R. Hartshorne, *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer 2000.

[5] R. Hartshorne, *Viete's construction of the regular heptagon*, spletna stran: `http://www.math.berkeley.edu/~robin/Viete/construction.html`

[6] G. E. Martin, *Geometric Constructions*, UTM, Springer 1998.

[7] J. Plemelj, *Die Siebenteilung des Kreises*, Monatshefte für Mathematik und Physik **23** (1912), 309–311.

[8] J. Plemelj, *Pravilni sedmerokotnik*, Obzornik mat. fiz. **5-6** (1954), 134–135.

[9] J. Stillwell, *Elements of Algebra: Geometry, Numbers, Equations*, Springer Verlag 1994.

[10] I. Vidav, *Rešeni in nerešeni problemi matematike*, Knjižnica Sigma, Mladinska knjiga, Ljubljana 1972.

[4]Pierpont je doktoriral na dunajski univerzi leta 1894 pri Leopoldu Gegenbauerju in Gustavu von Escherichu. Pri slednjem je leta 1898 doktoriral tudi sedem let mlajši Plemelj.

K-NUMERIČNI ZAKLAD MATRIKE

MIRKO DOBOVIŠEK

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 01A50, 01A55

Za vsako $n \times n$ matriko A in vsak $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, je k-numerični zaklad definiran kot $\Lambda_k(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P$ za neki ortogonalni projektor P ranga $k\}$. V članku je pregled nekaterih novejših rezultatov o k-numeričnem zakladu matrike. Dokazana je njegova konveksnost in dodan kratek program za risanje $\Lambda_k(A)$.

HIGHER RANK NUMERICAL RANGE

For any $n \times n$ complex matrix A and any $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, let $\Lambda_k(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P, P^2 = P, P^* = P, \mathrm{rank}\ P = k\}$. An overview of some new results about rank k numerical range is given in the article. Its convexity is proved, and a short program in MATLAB is given for computation of $\Lambda_k(A)$.

S $\mathbb{C}^n$ bomo označevali vektorski prostor kompleksnih n-terk nad obsegom kompleksnih števil. Skalarni produkt vektorjev x in y iz $\mathbb{C}^n$ bomo označili z $\langle x, y \rangle$, normo vektorja x pa z $\|x\|$. Množico kompleksnih matrik velikosti $n \times n$ bomo označevali z $\mathbb{M}_n$. Osnovne pojme linearne algebre, ki jih bomo uporabljali, lahko bralec najde v [7].

Definicija 1. *Numerični zaklad* matrike A je podmnožica kompleksnih števil, definirana z

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle; x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}. \tag{1}$$

Osnovne lastnosti tega numeričnega zaklada lahko bralec najde dokazane v [4, 5, 1] in še marsikje drugod. Tu jih samo na kratko navedimo. Numerični zaklad matrike je vedno zaprta, konveksna in neprazna množica v kompleksni ravnini. Vedno vsebuje vse lastne vrednosti matrike in numerični zaklad normalne matrike je konveksna ogrinjača njenih lastnih vrednosti. Pomembna je tudi klasifikacija sebiadjungiranih operatorjev s pomočjo numeričnega zaklada. Če je namreč numerični zaklad operatorja na realni osi, je operator sebiadjungiran. Zgornje lastnosti se da posplošiti tudi na operatorje na Hilbertovem prostoru in na elemente operatorskih algeber.

V zadnjih letih so se matematiki ponovno začeli zanimati za k-numerični zaklad matrik. Njegove lastnosti namreč potrebujemo pri študiju možnosti odprave napak pri kvantnih operacijah (kanalih). Oglejmo si, kaj je motivacija za študij k-numeričnega zaklada.

Pri kvantnem računanju so osnovni elementi informacije kubiti. Te lahko reprezentiramo kot $Q = vv^*$, kjer je v enotski vektor v $\mathbb{C}^2$. Če Q zapišemo kot matriko, je

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+z & x+iy \\ x-iy & 1-z \end{bmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x^2+y^2+z^2 = 1.$$

Stanje k kubitov pa predstavimo kot tenzorski produkt k takih 2×2 matrik

$$Q_1 \otimes \cdots \otimes Q_k.$$

Informacijo prenesemo po kvantnem kanalu tako, da jo najprej zakodiramo kot stanje n ($n \geq k$) kubitov. Potem jo pošljemo skozi kvantni kanal, kjer se lahko doda nezaželen šum. Na koncu jo dekodiramo in iz stanja n kubitov s šumom dobimo stanje k kubitov. Če imamo kakšne informacije o vzorcu napak kvantnega kanala, lahko konstruiramo operator za korekcijo kvantnih napak. Tu se ne bomo spuščali v podrobnosti procesa. Povejmo le še to, da je kvantni kanal/operacija kot preslikava na stanju n kubitov linearna preslikava

$$\Phi : \mathbb{M}_{2^n} \to \mathbb{M}_{2^n},$$

ki jo lahko zapišemo v obliki

$$\Phi(X) = \sum_{j=1}^{r} T_j X T_j^*, \quad \sum_{j=1}^{r} T_j^* T_j = I_{2^n},$$

za neke operatorje $T_j, j = 1, 2, \ldots, r$ [2]. Izkaže se, da kadar obstaja podprostor $V \subset \mathbb{M}_{2^n}$ dimenzije 2^k in kvantna operacija $\Psi : \mathbb{M}_{2^n} \to \mathbb{M}_{2^n}$, za katero velja

$$\Psi(\Phi(X)) = X, \quad \text{za vse} \quad X \in P_V \mathbb{M}_{2^n} P_V,$$

lahko napake kvantnega kanala Φ odpravimo [6]. S P_V smo označili ortogonalni projektor iz $\mathbb{C}^{2^n}$ na V.

Brez dokaza povejmo, da je to ekvivalentno obstoju podprostora V in nekih števil λ_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, r$, da je

$$P_V T_i^* T_j P_V = \lambda_{ij} P_V, \quad \lambda_{ij} \in \mathbb{C} \quad i, j = 1, 2, \ldots, r. \tag{2}$$

Za vsak i in j nas torej zanima obstoj kompleksnih števil, za katera velja (2).

Zapišimo definicijo:

Definicija 2. Naj bo A matrika velikosti $n \times n$ in $k \geq 1$ naravno število. Množico

$$\Lambda_k(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : PAP = \lambda P \quad \text{za neki ortogonalni projektor } P \text{ ranga } k\} \tag{3}$$

imenujemo *k-numerični zaklad matrike A.*

Pri $k = 1$ dobimo običajni numerični zaklad matrike, $\Lambda_1(A) = W(A)$, katerega nekaj lastnosti lahko bralec spozna v članku [4]. Osnovne lastnosti obeh numeričnih zakladov so podobne. Dokazi so trivialni.

- Za poljubni števili α in β je $\Lambda_k(\alpha A + \beta I) = \alpha\Lambda_k(A) + \beta$.
- Za poljubno unitarno matriko U je $\Lambda_k(U^* AU) = \Lambda_k(A)$.
- Če je B $r \times r$ matrika, ki pripada zožitvi operatorja, podanega z matriko A, in $r \geq k$, je $\Lambda_k(B) \subseteq \Lambda_k(A)$.

Lahko pa se zgodi, da je $\Lambda_k(A)$ za večje k prazna množica. Če ta množica ni prazna, je konveksna. Ta lastnost je bila dokazana razmeroma pozno [11]. Nekaj teh numeričnih zakladov bomo kasneje tudi narisali.

Preden se lotimo dokaza konveksnosti k-numeričnega zaklada matrike, dokažimo ekvivalentno definicijo.

Trditev 1. *Naj bo A matrika velikosti $n \times n$ in k naravno število. Potem je $\lambda \in \Lambda_k(A)$ natanko tedaj, ko obstaja k-razsežen podprostor $S \subseteq \mathbb{C}^n$, za katerega velja*

$$(A - \lambda I)S \perp S. \tag{4}$$

Dokaz. Naj bo $\lambda \in \Lambda_k(A)$. Potem je za neki projektor P ranga k

$$PAP = \lambda P.$$

Potem pa za vsak $x \in \mathrm{Im}P = S$ velja

$$\langle (A - \lambda I)x, x\rangle = \langle (A - \lambda I)Px, Px\rangle = \langle (PAP - \lambda P)x, x\rangle = 0.$$

Tudi obratno je očitno. Naj bo S k-dimenzionalen podprostor, za katerega velja (4). Če za P vzamemo ortogonalni projektor na S, je za vse $x \in \mathbb{C}^n$ vektor $PAPx - \lambda Px$ v S. Zato je $\langle PAPx - \lambda Px, PAPx - \lambda Px\rangle = 0$. Sledi $PAPx = \lambda Px$ za vse x. Torej $\lambda \in \Lambda_k(A)$. ∎

Pri dokazu konveksnosti običajnega numeričnega zaklada problem prevedemo na konveksnost numeričnega zaklada 2×2 matrike, ki je elipsa (ali degenerirana elipsa). Tu problem prevedemo na konveksnost numeričnega zaklada $2k \times 2k$ matrike. To je naredil H. W. Woerdeman leta 2007 [11]. Pri tem si je pomagal z rezultati M. D. Choia [3] iz istega leta.

Trditev 2. *Množica $\Lambda_k(A)$ je konveksna, če je konveksna za vse $2k \times 2k$ matrike.*

Dokaz. Naj bosta λ in μ različna elementa $\Lambda_k(A)$. Potem po trditvi 1 obstajata k-dimenzionalna podprostora L in M, za katera velja:

$$(A-\lambda I)L \perp L \quad \text{in} \quad (A-\mu I)M \perp M. \tag{5}$$

V preseku $L \cap M$ je lahko samo vektor 0, saj za $x \in L \cap M$ velja

$$\langle Ax, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle \quad \text{in} \quad \langle Ax, x\rangle = \mu\langle x, x\rangle,$$

kar pomeni $x = 0$. Vsota podprostorov L in M, označimo jo z $L + M = S$, je tako $2k$-razsežen podprostor. Označimo ortogonalni projektor na S s P_S. Zožitev T preslikave $P_S A$ na podprostor S lahko sedaj obravnavamo kot preslikavo $2k$-razsežnega prostora S vase. Numerični zaklad takšne preslikave pa je po predpostavki konveksna množica. Torej za vsak $\nu = t\lambda+(1-t)\mu, t \in [0,1]$, obstaja projektor P_R ranga k na podprostor R, za katerega velja

$$P_R T P_R = \nu P_R.$$

Ker je R podprostor prostora S, je $Q = P_R P_S$ ortogonalni projektor ranga k. Velja tudi

$$QAQ = P_R P_S A P_R P_S = P_R T\Big|_S P_R P_S = \nu P_R P_S = \nu Q.$$

Torej je $\nu \in \Lambda_k(A)$. ■

Lema 3. *Naj bosta matriki T in S kongruentni. Potem je $0 \in \Lambda_k(T)$ natanko tedaj, ko je $0 \in \Lambda_k(S)$.*

Dokaz. Če je $0 \in \Lambda_k(T)$, potem obstaja k-dimenzionalen podprostor L, da je

$$TL \perp L. \tag{6}$$

Naj bo $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ ortonormirana baza prostora L in A matrika, ki ima za stolpce vektorje te baze. Zaradi (6) je

$$Tu_j \perp L, j = 1, 2, \dots, k. \tag{7}$$

Zato je

$$A^*TA = 0.$$

Ker je S kongruentna matriki T, obstaja nesingularna matrika X, da je $S = XTX^*$. Če je $B = (X^*)^{-1}A$, je

$$B^*SB = 0.$$

Matrika B ima rang k. Naj bo C matrika, ki stolpce matrike B preslika v ortonormirane, in pišimo $BC = E$. Dobimo

$$E^*SE = C^*B^*SBC = C^*0C = 0,$$

kar pomeni, da je $0 \in \Lambda_k(S)$. ■

Trditev 4. *Množica $\Lambda_k(T)$ je konveksna za vsako matriko T.*

Dokaz. Trditev 2 nam pove, da je dovolj, da trditev pokažemo za $2k \times 2k$ matrike. Ker je k-numerični zaklad $\Lambda_k(T)$ zaprta množica, je za dokaz konveksnosti dovolj pokazati, da je razpolovišče vsake daljice s krajiščema v $\Lambda_k(T)$ spet v množici $\Lambda_k(T)$.

Naj bosta λ in μ elementa množice $\Lambda_k(T)$. Z afino preslikavo lahko λ in μ premaknemo v -1 in 1. Sedaj moramo dokazati, da je $0 \in \Lambda_k(T)$. Trditev 1 pove, da obstajata taka k-razsežna podprostora S_+ in S_-, da je

$$(T - I)S_+ \perp S_+, \quad (T + I)S_- \perp S_-.$$

Prostora se sekata trivialno. Definirajmo preslikavo $V : \mathbb{C}^{2k} \to \mathbb{C}^{2k}$, ki je identiteta na S_+, ortogonalni komplement $S_+^\perp$ pa naj izometrično preslika na S_-. Potem je

$$(V^*TV - I)S_+ \perp S_+ \quad \text{in} \quad (V^*TV + I)S_+^\perp \perp S_+^\perp.$$

Glede na razcep $\mathbb{C}^{2k} = S_+ \oplus S_+^\perp$ je bločni zapis matrike

$$S = V^*TV = \begin{bmatrix} I & X \\ Y & -I \end{bmatrix}.$$

Pokazati moramo le še, da je $0 \in \Lambda_k(S)$.

Tudi iz dejstva, da obstaja matrika B velikosti $2k \times k$, ranga k, za katero velja $B^*SB = 0$, lahko sklepamo, da je $0 \in \Lambda(S)$. Ravnamo kot v dokazu trditve 3. Gotovo obstaja taka obrnljiva matrika C (velikosti $k \times k$), da so stolpci matrike $A = BC$ ortonormirani vektorji. Potem pa je $A^*SA = C^*B^*SBC = C^*0C = 0$. Zaradi tega so stolpci matrike A baza prostora L, za katerega je $SL \perp S$. Trditev 1 pove, da je $0 \in \Lambda_k(S)$. Iščemo torej matriko Z, da bo

$$\begin{bmatrix} I & Z^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & X \\ Y & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ Z \end{bmatrix} = 0. \tag{8}$$

Ko matrike v (8) zmnožimo, dobimo enačbo

$$I + XZ + Z^*Y - Z^*Z = 0. \tag{9}$$

Pri dokazu eksistence rešitve enačbe (9) si pomagamo z algebrajsko Riccatijevo enačbo, ki je v splošnem videti takole:

$$A + HB^* + BH - HRH = 0, \tag{10}$$

kjer so $A = A^*$, B in $R > 0$ linearni operatorji, ki delujejo na $\mathbb{C}^n$. Enačba (10) se pojavi pri obravnavi optimalnega vodenja linearnih sistemov, zato je že zelo podrobno raziskana. Veliko lahko o tej enačbi zvemo v knjigi [10]. Tam je tudi dokaz, da ima Riccatijeva enačba

$$I + \left(B - \frac{1}{2}I\right) H + H \left(B - \frac{1}{2}I\right)^* - HRH = 0 \tag{11}$$

sebiadjungirano rešitev za poljuben operator $R > 0$. Pokažimo, da od tod sledi eksistenca rešitve enačbe (9). Najprej predpostavimo, da sta X in Y v enačbi (9) takšni matriki, da je matrika $X - Y^*$ obrnljiva. Označimo njen inverz z $J = (X - Y^*)^{-1}$. Če vzamemo v enačbi (11) za $B = XJ$ in $R = J^*J$ in je H sebiadjungirana rešitev enačbe (11), kratek račun pokaže, da je

$$Z = JH$$

rešitev enačbe (9). Kadar pa $X - Y^*$ ni obrnljiva matrika, najprej rešujemo enačbe

$$I + \left(X + \frac{1}{m}I\right) Z + Z^*Y - Z^*Z = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Sedaj so razlike $(X + \frac{1}{m}I) - Y^*$ obrnljive matrike, razen za kvečjemu končno mnogo m-jev. Pripadajoče rešitve Z_m lahko omejimo neodvisno od m. Iz (12) dobimo oceno

$$\|Z_m\|^2 = \|Z_m^* Z_m\| \leq 1 + (\|X\| + 1/m + \|Y\|)\|Z_m\|,$$

ki pove, da je zaporedje matrik $\{Z_m\}$ omejeno. Prostor je končno razsežen in zaradi kompaktnosti ima zaporedje $\{Z_m\}$ vsaj eno konvergentno podzaporedje. Limita katerega koli od teh podzaporedij je rešitev enačbe (9). ■

Opomba 1. Pri $n = 1$ je (11) enačba v $\mathbb{C}$

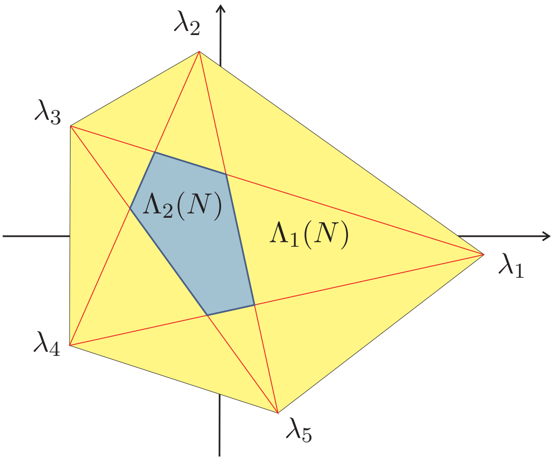
$$1 + (b - 1/2)h + h(\overline{b} - 1/2) - rh^2 = 0.$$

Če pišemo $c = (b + \overline{b}) - 1$, je $c \in \mathbb{R}$ in enačba se spremeni v kvadratno enačbo

$$1 + ch - rh^2 = 0, \quad r > 0.$$

Diskriminanta te enačbe je pozitivna za vse $r > 0$ in vse $c \in \mathbb{R}$ in enačba ima realno rešitev $h = \overline{h}$. Za $n > 1$ do rešitve ne moremo priti na tako enostaven način.

Kasneje je bilo dokazano [8], da je vsak k-numerični zaklad presek polravnin in zato avtomatično konveksna množica. Rezultat je naslednji:



Slika 1

Izrek 5. *Naj bo A $n\times n$ matrika in označimo z $\lambda_1(t) \geq \lambda_2(t) \geq \cdots \geq \lambda_n(t)$ lastne vrednosti matrike $e^{it}A + e^{-it}A^*$, urejene po velikosti. Potem je*

$$\Lambda_k(A) = \{\mu \in \mathbb{C} : e^{it}\mu + e^{-it}\overline{\mu} \leq \lambda_k(t), \quad t \in [0, 2\pi)\}. \tag{13}$$

V istem članku je tudi dokaz, da je k-numerični zaklad normalne matrike presek konveksnih ogrinjač množic, ki vsebujejo po $n-k+1$ lastnih vrednosti matrike (štetih z njihovimi večkratnostmi). Če ima normalna matrika N lastne vrednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, je

$$\Lambda_k(N) = \bigcap_{1\leq j_1<\cdots<j_{n-k+1}\leq n} \operatorname{conv}\{\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_{n-k+1}}\}.$$

Očitno je pri večjem k množica $\Lambda_k(N)$ lahko prazna.

Narišimo te numerične zaklade normalne matrike N velikosti 5×5, ki ima različne lastne vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$. Ker je matrika normalna, je $\Lambda_1(N) = W(N)$ petkotnik z oglišči v lastnih vrednostih. Po zgornji formuli je $\Lambda_2(N)$ presek štirikotnikov, ki jih dobimo, ko izpuščamo po eno od lastnih vrednosti (oglišč). Pri $k = 3$ je $\Lambda_3(N)$ že prazna množica: ko izpustimo dve oglišči, dobimo trikotnike, in presek vseh teh trikotnikov je prazna množica.

S formulo (13) si lahko pomagamo pri skiciranju k-numeričnega zaklada. Premico v kompleksni ravnini lahko zapišemo kot

$$\overline{a}z + a\overline{z} = 2b, \quad b \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Ko vstavimo za $z = x + iy$ in za $a = a_1 + ia_2$, se zgornja formula spremeni v enačbo premice v realni ravnini

$$a_1x + a_2y = b.$$

Zato je množica vseh $\mu = x + iy$, ki zadoščajo neenačbi

$$e^{it}\mu + e^{-it}\overline{\mu} \leq \lambda_k(t),$$

polravnina

$$x \cos t - y \sin t \leq \lambda_k(t).$$

Če torej želimo narisati k-numerični zaklad, je treba za $0 \leq t \leq 2\pi$ določiti po velikosti k-to največjo lastno vrednost matrike $e^{it}A + e^{-it}A^*$. Numerični zaklad je potem presek polravnin.

S programom Matlab to naredimo recimo z naslednjo funkcijo:

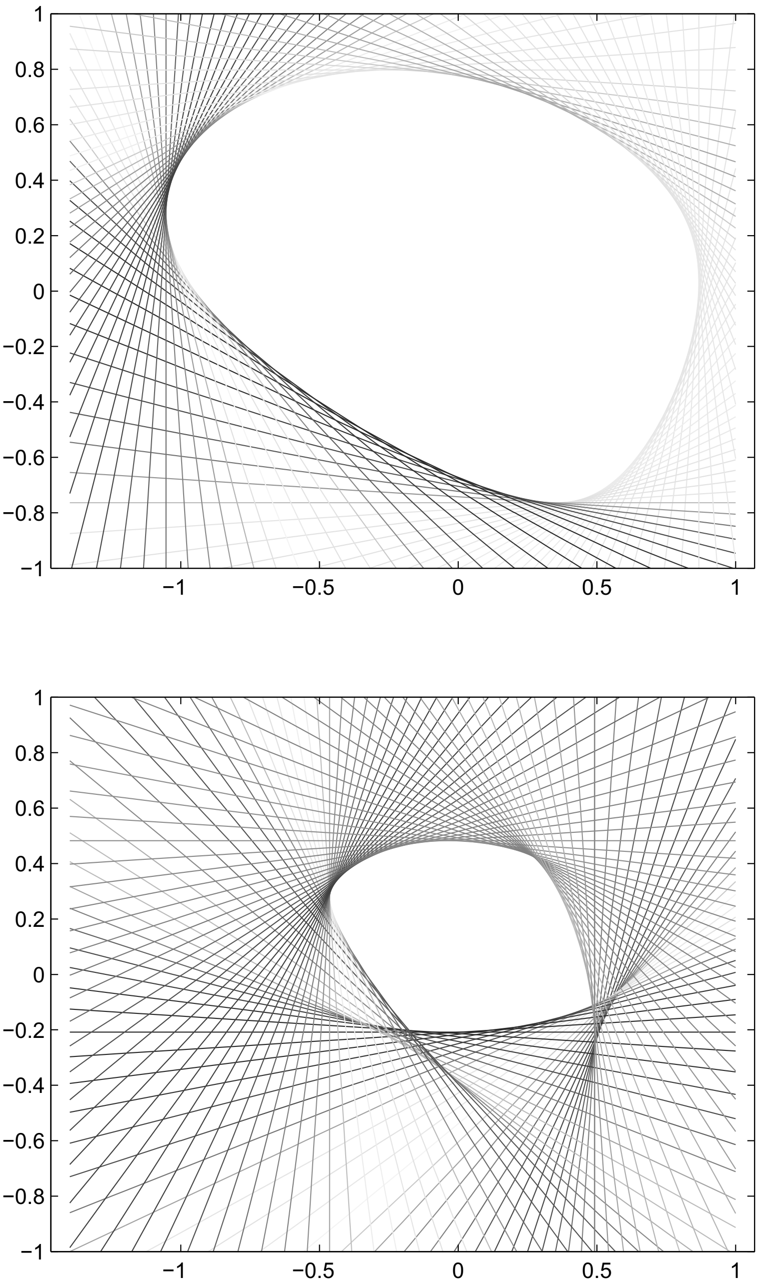
```
function [rerange, imrange] = nrange(A, P, k, a, b, c, d);}
% A matrika katere k numerični zaklad bi želeli narisati
% P želeno število premic
% riši na pravokotniku [a,b]x[c,d]
[m, n] = size(A);
if m ~= n
    error('ni kvadratna matrika');
end
for t=0:P
    T=(cos(t*2*pi/P)+i*sin(t*2*pi/P))*A;
    ReT=.5*(T+T');
    ure = sort((eig(ReT)));
    lk = ure(n-k+1) ;
    [x y]= meshgrid(a:0.2:b, c:0.2:d);
    contour(x,y,2*(x.*cos(t*2*pi/P) - y.*sin(t*2*pi/P)),[lk lk])
    axis equal
    hold on
end
```

Najprej podamo matriko A in pokličemo funkcijo `nrange`.

Na sliki 2 sta $\Lambda_1(A)$ in $\Lambda_2(A)$ matrike

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 1 & i & 1 & 0 \\ -1 & 0.2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0.2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -1+i \end{bmatrix}, \quad \text{na} \quad [-1.4, 1] \times [-1, 1], P = 100.$$

Na koncu povejmo, da je Liju, Poonu in Szeju uspelo dokazati [9], da je pri danem n k-numerični zaklad $\Lambda_k(A)$ neprazen za poljubno matriko, če


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1
−1
−0.5
0
0.5
1

Slika 2

je $n \geq 3k - 2$. Pri $n < 3k - 2$ pa že lahko najdemo $n \times n$ matriko, katere k-numerični zaklad je prazna množica.

Za operator A, delujoč na neskončno razsežnem Hilbertovem prostoru $\mathcal{H}$, k-numerični zaklad definiramo takole:

$$\Lambda_k(A) = \{\gamma \in \mathbb{C} : X^*AX = \gamma I_k, X : \mathbb{C}^k \to \mathcal{H}, X^*X = I_k\}.$$

V članku [9] je dokazano, da je v primeru, ko je $\mathcal{H}$ neskončno razsežen, $\Lambda_k(A) \neq \emptyset$ za vsa naravna števila k.

LITERATURA

[1] F. Bonsall in J. Duncan, *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and Elements of Normed Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1971.

[2] M. Choi, *Completely Positive Linear Maps on Complex Matrices*, Linear Algebra Appl. **10** (1975), 285–290.

[3] M. Choi, M. Giesinger, J. A. Holbrook in D. W. Kribs, *Geometry of higher-rank numerical ranges*, Linear and Multilinear Algebra **56** (2008), 53–64.

[4] M. Dobovišek, *Ponceletove krivulje*, Obzornik mat. fiz. **60** (2013), 4–14.

[5] K. E. Gustafson in D. K. M. Rao, *Numerical Range*, Springer, New York, 1997.

[6] E. Knill in R. Laflamme, *Theory of quantum error-correcting codes*, Physical Review A **55** (1997), 900–911.

[7] F. Križanič, *Linearna algebra in linearna analiza*, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1993.

[8] C. K. Li, N. S. Sze, *Canonical forms, higher rank numerical ranges, totally isotropic subspaces, and matrix equations*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 3013–3023.

[9] C. K. Li, Y. T. Poon in N. S. Sze, *Condition for the higher rank numerical range to be non-empty*, Linear and Multilinear Algebra **57** (2009), 365–368.

[10] P. Lancaster in L. Rodman, *Algebraic Riccati equations*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995.

[11] H. Woerderman, *The higher rank numerical range is convex*, Linear and Multilinear Algbra **56** (2008), 65–67.

UČITELJ IN RAZISKOVALEC

ALEŠ MOHORIČ

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

Kaj je poslanstvo univerze? V dodatku je citat iz strategije Univerze v Ljubljani [4], vendar podobno velja za vse univerze. Na kratko lahko poslanstvo povzamemo tako, da morajo biti univerzitetni sodelavci raziskovalci in učitelji. Ta izjava nič ne pove, ali sta obe vlogi združeni v eni osebi. Pri tem fakultete ravnajo avtonomno in običajno sodelavci združujejo obe vlogi: so raziskovalci in učitelji hkrati. Vprašamo se lahko, ali je dober raziskovalec tudi dober učitelj, ali obstaja med uspešnostjo v obeh vlogah korelacija? Odgovor na to ni enostaven. Najprej skušajmo pojasniti, kaj v določeni vlogi pomeni pridevnik dober. Dober učitelj [2] jasno definira učne cilje, pozna vsebino snovi in strategijo za njeno poučevanje, jasno razloži svojim študentom, kaj pričakuje od njih in zakaj, strokovno uporablja obstoječe učne materiale, da lahko posveti več časa delu, ki bogati in pojasni snov, pozna svoje študente, prilagaja pouk njihovim potrebam in predvidi napačne predstave v njihovem obstoječem znanju, uči metakognitivne strategije in daje študentom priložnosti, da jih osvojijo, obravnava kognitivne cilje tako na višji kot nižji ravni, spremlja razumevanje študentov s stalno in primerno povratno informacijo, integrira v pouk znanje z drugih predmetnih področij, sprejema odgovornost za rezultate pouka, je premišljen in razmišlja o svojem delu. Za uspešnost pri tem delu potrebuje naslednje lastnosti: jasno razlaga, rad dela z ljudmi, je navdušen, ima močno strokovno znanje, zna razporejati svoj čas, je sposoben delati v timu in samoiniciativno, zdrži stres, je pošten, pripravljen na spremembe in uživa v izzivih.

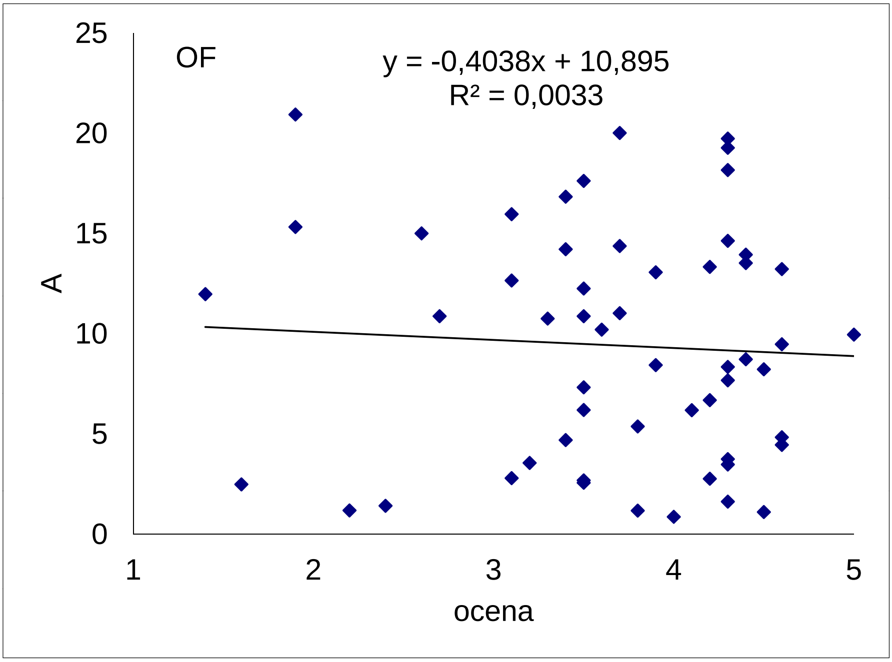
Poskusimo podati še karakteristike dobrega raziskovalca. Raziskovalec mora biti kreativen, visoko motiviran, dober reševalec problemov, mora opaziti težave in mu je izziv, da jih premaga, namesto da se jim izogne. Raziskovalec mora biti sposoben delati kot član ekipe in delovati kot vodja. Imeti mora strokovno znanje s področja svojih raziskav. Potrebuje odlične pisne in govorne kompetence, da lahko enostavno, učinkovito in prepričljivo komunicira. Potrebuje raziskovalne izkušnje in multidisciplinarno akademsko ozadje, osnovne multimedijske veščine in računalniško pismenost. Dober raziskovalec kaže željo po novih informacijah, ima izostren občutek za stvari okoli sebe, rad razpravlja in razmišlja o novih pojavih, zna izraziti svoje ideje, uporablja sistematičen pristop pri ocenjevanju razmer. Potrebne lastnosti so: motiviran, radoveden, predan, požrtvovalen. Odlikuje se po znanju, prepoznavanju, znanstvenem pristopu in povezovanju. Dober raziskovalec mora biti objektiven in mora poiskati ter sprejeti dokaze, ki bodisi podpirajo bodisi zavračajo hipotezo. Raziskave opravlja sistematično in upošteva veljavna načela in postopke. Rezultat raziskave mora biti preverljiv. Raziskava mora biti nadzorovana in temeljiti na empiričnih podatkih in ne na nepreverljivih privzetkih. Raziskovalec mora preveriti rezultate in jih primerjati z obstoječimi, tudi po literaturi, upoštevati mora znanstven pristop – opazovani pojav se mora ujemati z opisom. Preveriti mora rezultate in veljavnost drugih hipotez. Raziskovalno delo je sistematično, ponovljivo, nadzorovano (čim manj prostih parametrov), empirično (veljajo samo opazovani rezultati in ne pričakovani rezultati, pri tem se mora raziskovalec držati resnice in ne sme ponarejati rezultatov). Raziskovalci morajo biti pogumni in pripravljeni storiti napako ali odkriti kaj novega, presenetljivega. Raziskovalci so vztrajni, potrpežljivi, natančni, analitični, kritični, točni in izvirni. Zapisano velja na splošno za naravoslovje, ki skuša opisati realni svet bodisi z merjenji bodisi z abstraktnimi modeli. Pristop se lahko nekoliko razlikuje drugod, npr. v astronomiji poskusov ne moremo kontrolirati. Tudi v matematiki je drugače, ta vsaj v delu gradi svoje abstraktne svetove neodvisno od zunanje referenčne točke. Pri tem je pomembna le konsistentnost in neprotislovnost zgrajenega sistema, po drugi strani pa natančnost in poglobljenost razumevanja, vpogleda v obravnavano področje. Raziskujemo lahko tudi že znano, obstoječe s ciljem razširiti in poglobiti razumevanje, ampak ponovno z vpeljavo novega (le redko z npr. bolj računsko intenzivno analizo danih podatkov).

Mnogo opisanih znakov in lastnosti si učitelji in raziskovalci delijo in pričakovali bi, da je dober raziskovalec tudi dober učitelj. Vendar obstajajo tudi bistvene razlike. Raziskovalec je ozko usmerjen v svoje področje dela, učitelj pa potrebuje široko znanje. Motiviranost vrhunskega raziskovalca pri obravnavanju enostavnih, poučevalnih primerov hitro usahne. Težava je tudi čas, ki ga ena oseba lahko namenja obema področjema. Tu pogosto naletimo na težave pri poučevanju, saj so karierno pogosto bolj pomembni raziskovalni uspehi oz. se poučevalska vrednost niti ne ocenjuje niti ne upošteva. Najdemo lahko razloge, ki podpirajo tezo, da je dober raziskovalec tudi dober učitelj, in razloge, ki tej tezi nasprotujejo. Veliko raziskav o korelaciji ni, zanimiva pa je ena, ki jasno pokaže, da postanejo mladi raziskovalci, ki poleg raziskovalnega dela tudi učijo, boljši raziskovalci od kolegov, ki ne učijo [1].

Težava pri ovrednotenju korelacije je v načinu merjenja uspešnosti opravljanja enega od poslanstev. Objektivnih in enostavnih meril za uspešnost ni. Med merili, ki jih uporabljamo za merjenje znanstvene uspešnosti, so število člankov, število citatov ali kombinacija obojega – Hirschev indeks [5]. O ustreznosti zadnje ocene nam da misliti podatek, da ima eden od letošnjih nobelovcev h-indeks enak 5, kar je relativno malo. Agencija za raziskovanje in razvoj ocenjuje raziskovalno uspešnost po pravilniku [6] in ocena je za vsakega raziskovalca dostopna na [7] pod oznako A.

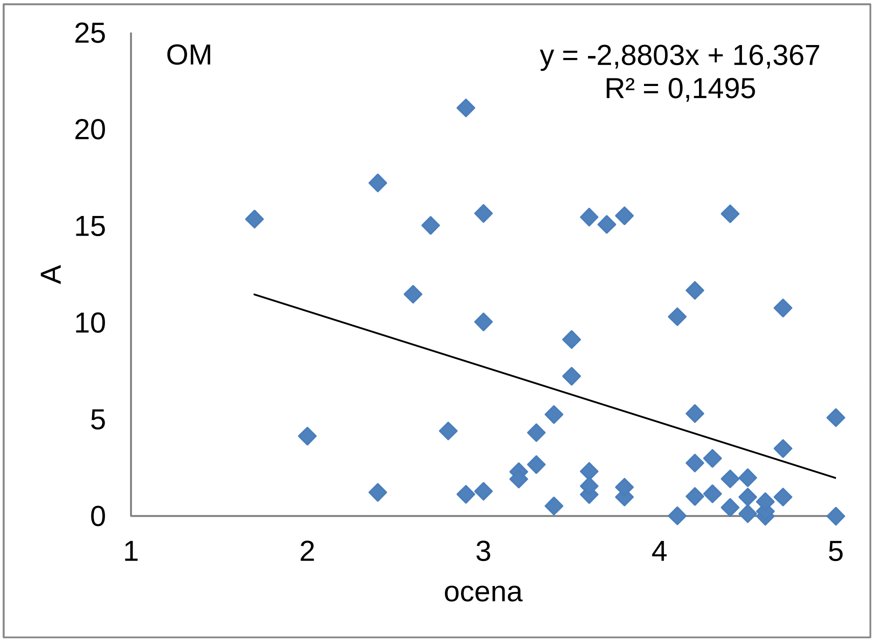
Še težje je vrednotiti uspešnost učitelja. Kakorkoli jo merimo, je potreben statističen pristop, ki pa je zaradi običajno majhnih vzorcev nezanesljiv. Drugi način so ankete, ki jih izpolnjujejo študenti. Vendar take ankete bolj merijo priljubljenost učitelja kot njegovo kvaliteto. Ena od takih preprostih anket je dostopna na internetu [8], kjer lahko kdorkoli ocenjuje učitelja z oceno od 1 do 5. Take ankete so še bolj podvržene manipulaciji.

Kljub nezanesljivosti kazalcev pa sta grafa na slikah 1 in 2, ki primerjata raziskovalno uspešnost, merjeno z oceno A, in poučevalsko uspešnost, merjeno z oceno na [8], zanimiva. Zbral sem podatke za sodelavce oddelkov za fiziko (slika 1) in matematiko (slika 2) Fakultete za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani. Posamezna točka v grafu ustreza ocenama raziskovalne in učiteljske uspešnosti posameznega sodelavca. Točkam prilagodimo premico in preverimo ujemanje točk z modelom.



Slika 1. Povezava med raziskovalno uspešnostjo A in oceno študentov za sodelavce Oddelka za fiziko na FMF, UL. R^2 pomeni koeficient določenosti in je blizu 1, če se podatki dobro prilegajo modelu, in blizu 0 v nasprotnem primeru.

Rezultati za fizike kažejo, da je koeficient določenosti majhen (0,003) in korelacije med raziskovalno uspešnostjo in učiteljsko oceno skoraj ni. Če že, potem je korelacija negativna, torej boljši kot je učitelj, slabši raziskovalec je.



Slika 2. Povezava med raziskovalno uspešnostjo A in oceno študentov za sodelavce Oddelka za matematiko na FMF, UL. R^2 pomeni koeficient določenosti in je blizu 1, če se podatki dobro prilegajo modelu, in blizu 0 v nasprotnem primeru.

Rezultati za matematike kažejo, da je koeficient določenosti še vedno majhen (0,15) vendar več velikostnih redov večji, kot je pri fizikih. Korelacije med raziskovalno uspešnostjo in učiteljsko oceno sicer še vedno skoraj ni, je pa bolj izrazita. Strmina premice modela je tudi bolj izrazita (smerni koeficient je petkrat večji kot za fizike) in bolj izrazito nakazuje, da so dobri raziskovalci slabši učitelji.

V splošnem rezultati kažejo, da je uspešnost na posameznem ali obeh področjih zelo odvisna od posameznika. Poleg tega mora vodstvo fakultete pri razmisleku o strategiji zaposlovanja upoštevati oboje: da potrebuje tako dobre raziskovalce kot tudi dobre učitelje.

Dodatek

Poslanstvo univerze je, da „goji temeljno, aplikativno in razvojno raziskovanje ter si prizadeva dosegati odličnost in najvišjo kakovost ter izpolnjevati najvišja etična merila na vseh področjih znanosti, umetnosti. Na teh področjih skrbi za utrjevanje nacionalne samobitnosti, posebej z razvojem slovenske strokovne terminologije.

Na osnovi lastnega raziskovanja ter domačih in tujih raziskovalnih dosežkov izobražuje kritično misleče vrhunske znanstvenike, umetnike in strokovnjake, ki so usposobljeni za vodenje trajnostnega razvoja, ob upoštevanju izročila evropskega razsvetljenstva in humanizma ter ob upoštevanju človekovih pravic. Posebno skrb namenja razvoju talentov.

Spodbuja interdisciplinarni in multidisciplinarni študij. Izmenjuje svoje dosežke na področju znanosti in umetnosti z drugimi univerzami in znanstvenoraziskovalnimi ustanovami. Tako prispeva svoj delež v slovensko in svetovno zakladnico znanja in iz nje prenaša znanje med študente in druge uporabnike.

Sodeluje z organizacijami iz gospodarstva in storitvenih dejavnosti v javnem in zasebnem sektorju, z državnimi organi, lokalnimi skupnostmi ter civilno družbo. S tem pospešuje uporabo svojih raziskovalnih in izobraževalnih dosežkov ter prispeva k družbenemu razvoju. Z dejavnim odzivanjem na dogajanja v svojem okolju predstavlja kritično vest družbe.“ [4]

LITERATURA

[1] Graduate Students’ Teaching Experiences Improve Their Methodological Research Skills, David F. Feldon et al. Science 333, 1037 (2011).

[2] Synthesis of research on good teaching: insights from the work of the Institute for research on teaching, A. C. Porter, J. Brophy, Educational leadership, 1988, 74–85.

[3] Ten qualities of a good researcher, Toledo-Pereyra LH, J Invest Surg. 2012 Aug; 25(4): 201-2. doi: 10.3109/08941939.2012.701543.

[4] Univerza (Ljubljana), Odlični in ustvarjalni: strategija Univerze v Ljubljani, 2012–2020, odgovorni urednik: Radovan Stanislav Pejovnik, 2012, ISBN 978-961-6410-39-7.

[5] `http://isiknowledge.com/`, ogled 21. 11. 2013.

[6] `http://www.arrs.gov.si/sl/akti/prav-sof-ocen-sprem-razisk-dej-jun-12.asp`, ogled 21. 11. 2013.

[7] `http://www.sicris.si/search/rsr_search1.aspx`, ogled 21. 11. 2013.

[8] `http://www.profesorji.net`, ogled 21. 11. 2013.

DVAJSETO MEDNARODNO TEKMOVANJE ŠTUDENTOV MATEMATIKE

Tudi letošnje poletje je angleška univerza University College London organizirala mednarodno tekmovanje študentov matematike, tokrat jubiljeno, dvajseto po vrsti. Ker se je število tekmovalcev izjemno povečalo, je bilo zadnja leta zelo težko najti primerno lokacijo sredi Evrope, kjer bi za razumno ceno dobili primerne prostore za dvodnevno tekmovanje in skoraj tedensko bivanje študentov in spremljevalcev. Zato je tudi letos, že četrtič zapored, tekmovanje potekalo v prostorih Ameriške univerze v Blagoevgradu v Bolgariji. Prijetno in zelo lepo mesto ob vznožju Rilskih gora Gorna Džumaja so v petdesetih letih preimenovali v Blagoevgrad, po ustanovitelju bolgarske komunistične partije Dimitru Blagoevu, ogromno stavbo komunistične partije z impresivnim trgom in tipično socrealistično arhitekturo pa je leta 1991 ironično prevzela in predelala v univerzo privatna ameriška inštitucija.

Pred tekmovanjem smo vodje ekip izbrali deset nalog, ki so se izkazale za zelo težke. 321 študentov prvih štirih letnikov je v neznosni vročini in visoki vlagi naloge reševalo naslednja dva dopoldneva, vsak dan po pet ur. Popoldan in pozno zvečer smo vodje ekip ocenjevali rešitve. Vsako rešitev morata neodvisno pregledati vsaj dve vodji in se na koncu strinjati z oceno. Po rezultatih so možne tudi pritožbe tekmovalcev. Razdelitev nagrad in pohval je podobna sistemu na srednješolskih matematičnih olimpijadah.

Slovenijo je zastopalo deset študentov: Matej Aleksandrov, Filip Kozar-

Slika 1. Predstavniki slovenskih univerz.

ski, Matej Petkovič, Primož Pušnik in Jurij Volčič z Univerze v Ljubljani ter Ratko Darda, Edin Husić, Radovan Krtolica, Bećo Merulić in Anastasija Tanana z Univerze na Primorskem. Matej Aleksandrov je dobil prvo nagrado. Jurij Volčič jo je žal zgrešil za eno točko in dobil drugo nagrado. Druge nagrade so dobili tudi Filip Kozarski, Primož Pušnik in Anastasija Tanana. Matej Petkovič je dobil tretjo nagrado. Edin Husić in Radovan Krtolica sta dobila pohvali. Zadnjih nekaj let poteka tudi neuradno tekmovanje univerz, kjer se za rezultat univerze vzame vsota rezultatov najboljših treh tekmovalcev in povprečje preostalih članov ekipe. Univerza v Ljubljani je zavzela zelo dobro sedemnajsto mesto v razvrstitvi 72 ekip.

Zelo veliko informacij o tem in preteklih tekmovanjih, vključno z nalogami, rešitvami in rezultati, lahko bralci dobijo na internetni strani organizatorja `http://www.imc-math.org`.

Za izziv in boljši občutek o zahtevnosti tekmovanja sledi nekaj nalog z rešitvami. Prva številka pove, kateri dan je bila naloga zastavljena, druga številka pa zaporedno številko naloge. Praviloma so naloge z višjo zaporedno številko težje od tistih z nižjo. Za reševanje nalog je dovolj poznavanje snovi, ki se predela v prvem letniku študija matematike. Letos so bile naloge pretežke in izjemno malo tudi najbolj natreniranih in najbolj genialnih študentov je v dovoljenem času zbralo več kot 40 % vseh možnih točk. Zato lahko vsako nalogo, ki vam jo uspe rešiti, štejete za precejšnji uspeh.

Lep primer, kako lahko s pretiranim zapletanjem standardnih nalog presežemo meje dobrega okusa, je naslednja naloga, ki je v različnih oblikah stalnica vseh tekmovanj, v lažjih oblikah pa jo je pogosto najti tudi na kolokvijih in izpitih pri začetnih tečajih analize. Konstrukcija primernih funkcij, ki dajo željeni rezultat s pomočjo Rollovega ali Lagrangeevega izreka, je tako zapletena, da so jo zmogli zelo redki tekmovalci. Tako se je na videz tipična tekmovalna naloga izkazala za praktično nerešljivo.

I. 2 *Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva funkcija, za katero je $f(0) = 0$. Pokaži, da obstaja število $\xi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, za katero je*

$$f''(\xi) = f(\xi)(1 + 2\operatorname{tg}^2\xi).$$

Definirajmo novo funkcijo g s pravilom $g(x) = f(x)\cos x$. Ker je

$$g(-\tfrac{\pi}{2}) = g(0) = g(\tfrac{\pi}{2}) = 0,$$

po Rollovem izreku obstajata takšni števili $\xi_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ in $\xi_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$, da je

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0.$$

Potrebovali bomo še funkcijo

$$h(x) = \frac{g'(x)}{\cos^2 x} = \frac{f'(x)\cos x - f(x)\sin x}{\cos^2 x}.$$

Slika 2. Ekipa Univerze na Primorskem na podelitvi v menzi kampusa Ameriške univerze.

Ker je $h(\xi_1) = h(\xi_2) = 0$, spet po Rollovem izreku obstaja število $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$, za katero je $h'(\xi) = 0$. To pomeni:

$$0 = h'(\xi) = \frac{g''(\xi)\cos^2\xi + 2\cos\xi\sin\xi\, g'(\xi)}{\cos^4 x} =$$

$$\frac{(f''(\xi)\cos\xi - 2f'(\xi)\sin\xi - f(\xi)\cos\xi)\cos\xi + 2\sin\xi(f'(\xi)\cos\xi - f(\xi)\sin\xi)}{\cos^3\xi}$$

$$= \frac{f''(\xi)\cos^2\xi - f(\xi)(\cos^2\xi + 2\sin^2\xi)}{\cos^3\xi} = \frac{f''(\xi) - f(\xi)(1 + 2\,\mathrm{tg}^2\xi)}{\cos\xi}.$$

Takšno število ξ pa smo iskali.

Bralcem zelo priporočam, da se preizkusijo v naslednji zelo simpatični kombinatorični nalogi. Že rešitve za majhne konkretne n so večji izziv kot vsaka še tako težka tabelica sudoku.

I. 3 *V šoli je $2n$ dijakov, $n \geq 2$. Vsak teden je na izlet odšlo po n dijakov. Po nekaj izletih so ugotovili, da je bil poljuben par dijakov skupaj vsaj na enem od izletov. Kolikšno je najmanjše število opravljenih izletov?*

Pa recimo, da bi bil pogoj izpolnjen za manj kot šest izletov. V tem primeru bi bilo skupno število dijakov, ki so se udeležili vseh izletov, največ $5n$. Na vsakem izletu dijak sreča $n-1$ drugih dijakov, zato mora vsaj na tri izlete, da sreča vseh $2n-1$ preostalih dijakov. Tako mora vsak od $2n$ dijakov na vsaj tri izlete in skupno število dijakov na vseh izletih mora biti vsaj $3 \cdot 2n = 6n$, kar je v nasprotju z največ $5n$ dijaki na vseh izletih. Zato je potrebno število izletov vsaj šest.

Slika 3. Ekipa Univerze v Ljubljani v Rilskem samostanu.

V nadaljevanju bomo pokazali, da je primer s šestimi izleti izvedljiv. Za motivacijo in idejo bomo najprej poiskali rešitve za majhne n.

V primeru $n = 2$ je konstrukcija jasna. Dijake poimenujmo 1, 2, 3 in 4. Pogoju naloge zadoščajo naslednji izleti parov: $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$.

Nekaj več dela je s primerom $n = 3$. Dijaki 1–6 lahko opravijo izlete: $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(3, 4, 5)$, $(3, 4, 6)$, $(1, 5, 6)$, $(2, 5, 6)$.

Ko poskušamo konstruirati izlete v primeru $n = 4$, hitro vidimo, da si lahko pomagamo s primerom $n = 2$. Idejo lahko posplošimo: Če je n sodo število, razdelimo $2n$ dijakov v enako močne skupine A, B, C in D. Nato opravimo izlete skupin (A, B), (C, D), (A, C), (B, D), (A, D) in (B, C).

Enako lahko posplošimo primer $n = 3$. Če je n liho število, ki je deljivo s 3, dijake razdelimo v enako močne skupine E, F, G, H, I in J ter opravimo izlete (E, F, G), (E, F, H), (G, H, I), (G, H, J), (E, I, J) in (F, I, J).

V primeru $n = 5$ ugotovimo, da lahko primerne izlete sestavimo z zvitim lepljenjem primerov $n = 2$ in $n = 3$. Nasploh lahko vsako naravno število $n \geq 5$ razcepimo na vsoto $n = 2x + 3y$, kjer sta x in y naravni števili. Ustrezna diofantska enačba s spremenljivkama x in y je rešljiva, ker sta si števili 2 in 3 tuji. Tvorimo skupine A, B, C in D z x dijaki ter skupine E, F, G, H, I in J z y dijaki. Potem dobimo iz primera $n = 5$ idejo za izlete (A, B, E, F, G), (C, D, E, F, H), (A, C, G, H, I), (B, D, G, H, J), (A, D, E, I, J) in (B, C, F, I, J).

Tudi prva naloga drugega dne se je izšla presenetljivo slabo. Kljub navidezni enostavnosti le redke elementarne poti pripeljejo do rešitve. Študenti so poskušali vse mogoče. Precej pravilnih rešitev je uporabljalo rezultate o preslikavah območij s holomorfnimi funkcijami.

Slika 4. Izjemen uspeh študentov Univerze v Ljubljani. Vsi so dobili nagrade.

II. 1 *Naj bo z kompleksno število, za katero je* $|z+1| > 2$. *Pokaži, da je* $|z^3+1| > 1$.

Ker je $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1)$, je dovolj pokazati, da je $|z^2-z+1| \geq \frac{1}{2}$.

Število $z+1$ napišimo v polarni obliki kot $z+1 = re^{i\varphi}$. Zlahka izračunamo, da je

$$z^2 - z + 1 = r^2 e^{2i\varphi} - 3re^{i\varphi} + 3.$$

Zato je

$$|z^2 - z + 1|^2 = (r^2 e^{2i\varphi} - 3re^{i\varphi} + 3)(r^2 e^{-2i\varphi} - 3re^{-i\varphi} + 3) =$$

$$= r^4 + 9r^2 + 9 - (6r^3 + 18r)\cos\varphi + 6r^2(2\cos^2\varphi - 1) =$$

$$= 12\left(r\cos\varphi - \tfrac{r^2+3}{4}\right)^2 + \tfrac{1}{4}(r^2-3)^2 > \tfrac{1}{4},$$

saj je $r > 2$.

Če se je le dalo, sem v večerih po tekmovanju sodeloval pri ocenjevanju rešitev nalog iz linearne algebre. S popravljanjem naslednje naloge smo se mučili do zgodnjih jutranjih ur. Naloga je še posebej zanimiva, ker poleg intuitivne, a tehnično še kar zapletene geometrijske rešitve obstaja tudi zvita rešitev, ki meji na uporabo statistike.

II. 3 *Naj bodo $v_1, \dots, v_d$ enotski vektorji v $\mathbb{R}^d$. Pokaži, da obstaja takšen enotski vektor $u \in \mathbb{R}^d$, da je*

$$|\langle u, v_i \rangle| \leq \frac{1}{\sqrt{d}} \qquad \textit{za } i = 1, 2, \dots, d.$$

Pri tem $\langle \cdot, \cdot \rangle$ označuje običajni skalarni produkt po komponentah v $\mathbb{R}^d$.

Če so vektorji $v_1, \dots, v_d$ linearno odvisni, temu pogoju zadošča katerikoli vektor u iz njihovega ortogonalnega komplementa. Zato lahko privzamemo, da so vektorji $v_1, \dots, v_d$ linearno neodvisni.

Naj bo $\{w_1, \dots, w_d\}$ ustrezna dualna baza, to je $\langle v_i, w_j \rangle = \delta_{i,j}$, kjer $\delta_{i,j}$ pomeni Kroneckerjev delta. Ker je $\langle v_i, w_i \rangle = 1$, je $\|w_i\| \geq 1$.

Za vse možne izbire predznakov $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \{-1, 1\}^d$ si poglejmo 2^d vsot oblike $u_\varepsilon = \sum_{i=1}^d \varepsilon_i w_i$. Za vse $k = 1, \dots, d$ velja

$$|\langle u_\varepsilon, v_k \rangle| = \left| \sum_{i=1}^d \varepsilon_i \langle w_i, v_k \rangle \right| = \left| \sum_{i=1}^d \varepsilon_i \delta_{i,k} \right| = |\varepsilon_k| = 1.$$

Povprečje kvadratov vseh norm $\|u_\varepsilon\|^2$ je enako

$$2^{-d} \sum_\varepsilon \|u_\varepsilon\|^2 = 2^{-d} \sum_\varepsilon \left\langle \sum_{i=1}^d \varepsilon_i w_i, \sum_{j=1}^d \varepsilon_j w_j \right\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \langle w_i, w_j \rangle \left(2^{-d} \sum_\varepsilon \varepsilon_i \varepsilon_j \right) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \langle w_i, w_j \rangle \delta_{i,j} = \sum_{i=1}^d \|w_i\|^2 \geq d.$$

Drugo enakost v drugi vrstici vidimo takole: V primeru $i = j$ je $\sum_\varepsilon \varepsilon_i^2 = \sum_\varepsilon 1 = 2^d$. V primeru $i \neq j$ pa je

$$\sum_\varepsilon \varepsilon_i \varepsilon_j = \sum_{\varepsilon : \varepsilon_i = \varepsilon_j} 1 + \sum_{\varepsilon : \varepsilon_i = -\varepsilon_j} (-1) = 2^{d-1} - 2^{d-1} = 0.$$

Ker je povprečje kvadratov norm vsaj d, mora obstajati takšen izbor predznakov ε, da je $\|u_\varepsilon\|^2 \geq d$. Če vzamemo $u = \frac{u_\varepsilon}{||u_\varepsilon||}$, je

$$|\langle u, v_i \rangle| \leq \tfrac{1}{\sqrt{d}} \left| \left\langle \sum_{j=1}^n \varepsilon_j w_j, v_i \right\rangle \right| = \tfrac{1}{\sqrt{d}} \left| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \delta_{i,j} \right| = \tfrac{1}{\sqrt{d}}$$

za vse $i = 1, \dots, n$.

Marjan Jerman

INTERAKTIVNE TABLE IN POUK MATEMATIKE

Pri pouku matematike se na nekaterih fakultetah in gimnazijah tudi pri nas že uporabljajo interaktivne table. Ker je pričakovati, da bodo te table (ali kakšni podobni, še naprednejši sistemi, kot npr. veliki zasloni na dotik) v bližnji prihodnosti postale običajno orodje profesorjev in predavateljev, morda ni odveč kratka informacija (povzeta po dobro obiskani predstavitvi 9. 10. 2013 na UL FMF na Jadranski 21, kjer sta v predavalnicah 3.05 in 3.10 nameščena dva primera teh tabel) o tem, kaj omogočajo in kako se uporabljajo.

Po interaktivnih tablah, na katere priključimo računalnik (nanj moramo le namestiti gonilnik za interaktivno tablo, ki ga pridobimo na internetu) ter projektor, lahko pišemo (in brišemo) podobno kot po navadnih tablah bodisi s pisalom (ki ima vse funkcionalnosti miške) bodisi s prstom. Tako lahko komuniciramo s poslušalci neposredneje (ni se nam treba sklanjati nad računalnik in tipkati nanj), rezultate svojega sprotnega dela, zapisane na posamezne strani, lahko tudi listamo („scrollamo“), shranjujemo ter izvozimo (čeprav shranjene bitne slike v PDF, kot opozarjajo tisti, ki te table že nekaj časa uporabljajo, za zdaj še nimajo dobre resolucije). Uporabljamo jih lahko v kombinaciji z drugimi že obstoječimi orodji (Power Point, PDF datoteke, prosojnice, Mathematica, internetni matematični programi, ipd.).

Sama uporaba interaktivnih tabel je enostavna. Na začetku jih je treba le umeriti (kalibrirati z našim računalnikom) s kliki na pet križcev na zaslonu, potem pa že lahko po njih pišemo v različnih barvah, z različnimi debelinami svinčnikov, rišemo lahko tudi poljubne like, ipd. Na predstavitvi sta bili izpostavljeni še dve pomembni odliki predstavljenih interaktivnih tabel: tihost projektorja ter njegova postavitev bliže tabli, tako da snop svetlobe manj slepi predavatelja. Čeprav so navzoči na predstavitvi opozorili tudi na nekatere tehnične slabosti in pomanjkljivosti, pa so interaktivne table zagotovo pomemben korak k privlačnejšemu pouku matematike na šolah in fakultetah.

A ob vsem navdušenju za nova tehnična pomagala ne pozabimo: obvladovanje sodobnih orodij in tehničnih sredstev je le ena od veščin, ki jo je treba obvladati, še vedno pa je najpomembnejša sama kakovost posredovanja vsebin ter sposobnost predavatelja, da jih tudi besedno predstavi kar najbolj jasno, natančno in privlačno.

Jurij Kovič

ŠE O MATEMATIČNEM IZRAZJU V UČBENIKIH

K pisanju me je vzpodbudil nedavni članek prof. Petra Preloga v Obzorniku [2]. Rad bi ga še podprl s podobnimi nerodnostmi.

V zbirki nalog za matematiko v 4. razredu osnovne šole [1] najdemo poleg drugih naslednje naloge:

- *Razliko števil 62 in 37 zmanjšaj petkrat.*
- *Količnik števil 42 in 6 povečaj osemkrat.*
- *Število 60 zmanjšaj desetkrat, dodaj 3 in dobljeno število še osemkrat povečaj!*

Otroci so v šoli dobili navodilo, da v takih nalogah števila zmanjšujejo z deljenjem in povečujejo z množenjem. Tako izražanje in tudi razumevanje sta blizu vsakdanji rabi, vendar ne moremo brez dvomov.

Ob tem sem se spomnil na pokojnega profesorja Ivana Štalca, ki nam je, študentom, skušal prikazati dvoumnost takega izražanja s preprostim zgledom:

Pogovarjata se znanca in pravi prvi: Letos so nam dvakrat povečali plačo, pa je vsega komaj za kavo.

Hitro nam je bilo jasno, kaj je hotel povedati. Plačo, pa tudi števila, lahko nekajkrat povečamo ali zmanjšamo, pa se ne bo kaj dosti poznalo, če so povečanja ali zmanjšanja neznatna. Plača je bila povečana dvakrat, ni pa bila podvojena, kakor bi kdo na hitro pomislil.

Morebiti se zdi težnja po čim natančnejšem izražanju pretirana, zlasti če se tudi pri nenatančnem izražanju razumemo. Vendar se moramo zavedati omejitev. V Slovarju slovenskega knjižnega jezika [3] najdemo obširen zapis rabe izbranih besed. Tako vidimo, da izrazi, kot so *enkrat, dvakrat, trikrat, štirikrat*, ... izražajo v prvi vrsti število ponovitev nekega dejanja. Torej v našem primeru povečanja ali zmanjšanja. V drugem kontekstu pa je pomen hitro širši. Tako preberemo, da je lahko *pot točno enkrat daljša*, da je nekaj *dvakrat večje*, da se je „*število bolnikov sedemkrat povečalo*“ in podobno. Isto lahko bolj nedvoumno izrazimo z *dvojen, trojen*, ..., ali *dvakraten, trikraten*, ..., ki pomenijo, da je nekaj dvakrat, trikrat, ... tolikšno. Omenjene so tudi povezave z glagolom povečati: *povečati štirikrat, podvojiti, potrojiti*, ... Ali *štirikratna pomanjšava, petkratna povečava*, ... Ali z glagolom *zmanjšati: zmanjšati na polovico.*

Vidimo, da je jezik zelo gibek in ga lahko uporabimo na različne načine. Jezik v šoli naj bi bil sicer čim bližje vsakdanji govorici, za potrebe matematike in naravoslovja pa bi si želeli, da je v izjavah čim manj dvomov.

Naloge v začetku so izražene ohlapno tudi s stališča vsakdanje govorice. Slovar slovenskega knjižnega jezika ponuja tudi drugačne manj dvoumne rešitve. Na primer:

- *Razliko števil 62 in 37 zmanjšaj na petino.*
- *Količnik števil 42 in 6 povečaj na osemkrat toliko.*
- *Število 60 zmanjšaj na desetino, dodaj 3 in dobljeno število povečaj na osemkrat toliko.*

Najbrž bi se našlo tudi drugačno izrazje. Vsekakor bi se bilo dobro dogovoriti za tako, ki ga bomo vsi enolično razumeli.

In na koncu še najmanj sporna rešitev:

- *Razliko števil 62 in 37 deli s 5.*
- *Količnik števil 42 in 6 pomnoži z 8.*
- *Število 60 deli z 10, dodaj 3 in dobljeno število pomnoži še z 8!*

Ta pa zveni preveč šolsko in ne izrablja možnosti jezika.

LITERATURA

[1] S. Osterman, *Računanje je igra*, Zbirka nalog za 4. razred osnovne šole, Antus, Jesenice 2013.

[2] P. Prelog, *Koliko je enkrat manj kot 100?*, Obzornik mat. fiz. 60 (2013) 120–XI.

[3] Slovar slovenskega knjižnega jezika, `bos.zrc-sazu.si/sskj.html`.

Marjan Hribar

ODZIV NA PISMO PETRA PRELOGA

To je odmev na pismo Petra Preloga v letošnji 3. številki Obzornika za matematiko in fiziko. Zadnji odstavek njegovega pisma je rotitev članov DMFA, naj se dogovorimo in poskrbimo za nedvoumno govorico osnovnih matematičnih informacij glede uporabe besed TOLIKO, VEČ in MANJ. Z tem pismom želim pokazati, da je rešitev enostavna in že pred nami, če le pravilno razločujemo te besede.

Besedi TOLIKO in VEČ nimata istega pomena, pa če je pred njima množilni števnik ali ne. Naj najprej dam primera različnih pomenov za TOLIKO in VEČ v enostavnih stavkih:

- Danes je na cesti TOLIKO ljudi kot včeraj.
- Danes je na cesti VEČ ljudi kot včeraj.
- Danes je na cesti pet ljudi VEČ kot včeraj.

Beseda VEČ označuje, da dodajamo, medtem ko TOLIKO „izraža sorazmernost količine, mere, kot jo določa sobesedilo“ (po `http://bos.zrc-sazu.si/cgi/a03.exe?name=sskj_testa&expression=toliko&hs=1`). Torej „trikrat toliko“ pomeni „v sorazmerju 3 proti 1“, kar pomeni množenje brez prištevanja, medtem ko „trikrat več“ pomeni, da dodamo neko količino trikrat k dani. Tako je „200 je enkrat več od 100“ pravilno, „200 je dvakrat več od 100“ pa nepravilno.

Še več primerov:

- Otrok ima polkrat toliko denarja kot jaz, teta pa polkrat več kot jaz.

  Torej če imam jaz 100 evrov, jih ima otrok 50, teta pa 150.
- Otrok ima tretjino[krat] toliko kot jaz, teta pa tretjino[krat] več kot jaz.

  Torej če imam jaz 30 evrov, jih ima otrok 10, teta pa 40.
- Janez ima 100 evrov, Tone pa dvakrat toliko, torej 200 evrov.
- Janez ima 100 evrov, Tone pa dvakrat več, torej 300 evrov.

Beseda MANJ pove, koliko odštejemo.

- Otrok ima tretjino tistega kot jaz. $(= 1/3)$
- Teta ima tretjino MANJ kot jaz. $(= 2/3)$

Peter Prelog je izračunal, da ima Tinka $100\colon 2 = 50$ evrov, če vemo naslednje:

- Janez ima 100 evrov, Tinka ima dvakrat manj.

Jaz takega stavka ne bi napisala, in če bi ga, bi izračunala, da ima Tinka $100 - 2 \times 100 = -100$ evrov, torej je v minusu. Če spremenimo „dvakrat“ v „polkrat“, bi jaz rekla, da ima Tinka $100 - 1/2 \times 100 = 50$ evrov (in ne $100\colon (1/2) = 200$ evrov). Podobno stavek „Na cesti je/ni ničkrat manj ljudi kot včeraj“ pove, da je danes na cesti isto število kot včeraj (ne pa včerajšnje število deljeno z nič).

Že trideset let živim v tujini, od leta 1992 kot profesorica matematike na univerzah. V angleščini imata stavka „Tinka has twice as much as Tine“ in „Tinka has twice more than Tine“ neoporečno različna pomena. Tudi v slovenščini je tako!

Strinjam se s Petrom Prelogom, da dodatek besed ŠE ali ZA ne pripomore k jasnosti stavkov, ki jih nismo razumeli brez dodatka. Jaz bi se dodatkov izogibala.

Peter Prelog citira učbenik naravoslovja: če se temperatura poveča za dvakrat, se energija poveča za šestnajstkrat. Strinjam se, da je ta raba napačna. Vemo, da je energija sorazmerna s četrto potenco temperature, v učbeniku pa naj bi napisali nekaj takega: če je nova temperatura dvakrat tolikšna kot prvotna, je nova energija šestnajstkrat tolikšna kot prvotna, ali pa še lepše: če se temperatura podvoji, se energija pošestnajsteri.

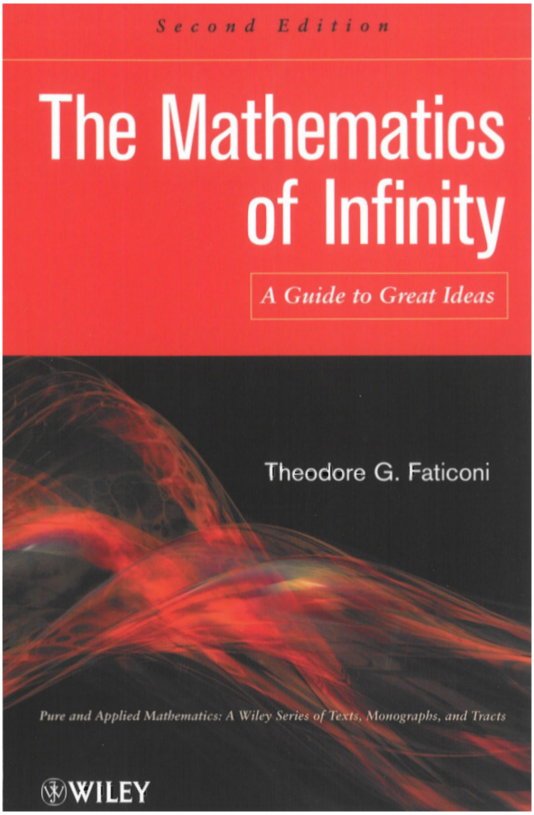
Za pomen besede TOLIKO sem se sklicala na spletni slovar Inštituta za slovenski jezik Frana Ramovša ZRC SAZU `http://bos.zrc-sazu.si/sskj.html`, ki ga vsem priporočam. Vendar se ne strinjam z vsemi razlagami v slovarju. Morda njegova razlaga besede KRAT pripomore ali pa je sad te zmede z VEČ in TOLIKO. Namreč, v tem slovarju je po moje pomešan pomen besed PONOVITEV in POJAVITEV. Na primer, razlaga besede ŠTIRIKRAT na `http://bos.zrc-sazu.si/cgi/a03.exe?name=sskj_testa&expression=krat&hs=251`: „izraža štiri ponovitve“. Pravilna razlaga bi po mojem bila: „izraža štiri pojavitve“. Če se nekaj ponovi, se mora le-tisto najprej zgoditi enkrat, šele potem ponoviti. Stavek „Fantek je ponovil skok v lužo“ pomeni, da je fantek najprej skočil, potem pa to ponovil, torej je skočil dvakrat. Zatorej stavek „Fantek je dvakrat ponovil skok v lužo“ pomeni, da je fantek najprej skočil, potem pa to ponovil dvakrat, torej je skočil trikrat. Razumem, da smo lahko v pogovornem jeziku malo površni s pomenom, ampak v matematiki si tega ne smemo dovoliti.

Ta zmeda me spominja ne napake starih jezikov, ko so razumeli navodila, da naj bi bilo prestopno vsako četrto leto, kot da je prestopno tisto čez tri leta (`http://en.wikipedia.org/wiki/Julian_calendar#Leap_year_error`). Podobna zmedotvorna jezikovna tvorba nam je znana iz svetega pisma, ki piše, da je Jezus vstal „tretji dan“, mi bi pa v sodobnem jeziku rekli, da je vstal čez dva dneva; Italijani v tem smislu še danes rečejo „quindici (15) giorni“, ko mislijo dva tedna.

Irena Swanson

NOVE KNJIGE

Theodore G. Faticoni: The Mathematics of Infinity, A Guide to Great Ideas, John Wiley & Sons, 2012, 338 strani.



Knjiga, zasnovana kot dopolnilni učbenik za predmet Teorija množic za študente prvih letnikov, lepo osvetljuje same temelje področja, kjer se konča logika in začne matematika: problematiko neskončnosti. Razdeljena je na devet poglavij: Logika, Množice, Funkcije, Štetje neskončnih množic, Neskončna kardinalna števila, Dobro urejene množice, Indukcija in števila, Praštevila, Logika in metamatematika. Obravnava teh področij je razmeroma elementarna, raje bolj poljudna kot pa učbeniško suhoparna; ne manjka tudi zabavnih ponazoritev posameznih konceptov.[1] Avtor se zelo trudi, da bi študij dolgočasnih osnov matematike bralcu naredil kar se da privlačen,[2] marsikdaj definicije matematičnih pojmov ponazori tudi s konkretnimi primeri iz življenja.[3] V razlago spretno vpleta tudi nekatere teme, ki na prvi pogled ne sodijo najbolj v osnovni tečaj teorije množic, kot so npr. osnovni izrek aritmetike, reševanje kubične enačbe, popolna števila, iracionalnost števila $\sqrt{2}$, število googol (10^{100}) –

[1] Tako npr. Hilbertov neskončni hotel lepo ilustrira paradoks neskončnih množic, ki so vselej v bijektivni korespondenci z neko svojo pravo podmnožico (kar je v nasprotju z običajno zdravorazumsko intuicijo, po kateri „del ne more biti enak celoti").

[2] Tako npr. navaja množico psov z doktoratom iz matematike kot primer množice, ki je bila ob pisanju knjige še prazna!

[3] Tako npr. pojem funkcije ponazori s primerom funkcije $t : L \to N$, ki vsakemu kraju na Zemlji priredi njegovo temperaturo na dan 1. januarja 2005.

približno toliko je zrnc peska na Zemlji – in njegovi izpeljanki googolplex 10^{googol} ter $10^{googolplex}$, rekurzivna formula za $q_k(n) = \sum_{l=1}^{n} l^k$, torej za vsoto k-tih potenc prvih n naravnih števil, ničle Riemannove zeta funkcije $\zeta(s) = \Pi \frac{1}{1-1/p^s}$ (kjer je p poljubno praštevilo), hipoteza kontinuuma, itd. Knjiga se konča s kratko predstavitvijo razširitve Gödlovega izreka, ki pravi, da če je C množica resničnih izjav iz nekega logičnega sistema, potem obstaja resnična izjava Q, ki ni izpeljiva iz C; ta rezultat uporabi za dokaz „metamatematične“ trditve, da na nobenem področju (npr. v fiziki, matematiki, itd.) ni možna „teorija vsega“.

Avtor že v uvodu pove, da si je okrog leta 1920 več logikov (v želji, da bi matematiko obvarovali paradoksov, ki so se pojavili v samem njenem temelju – Cantorjevi teoriji množic) prizadevalo izpeljati velik del matematike iz binarne logike, po kateri je večini izjav mogoče pripisati eno od dveh logičnih vrednosti: resnična oz. pravilna (1) ali neresnična oz. nepravilna (0). Okrog 1930 pa je logik in matematik Kurt Gödel dokazal, da z nikakršnimi napori ni mogoče izpeljati vse matematike zgolj iz logike. To je bila težka lekcija za zagovornike aksiomatske metode (npr. za Hilberta).

Knjiga obravnava dvojiško logiko na bolj tradicionalen način. Logične veznike *in*, *ali*, *ne*, *če-potem* vpelje podobno, kot je to storil Aristotel pred približno 2600 leti (pri čemer za prve tri sploh ne uporablja ustreznih standardnih oznak $\wedge, \vee, \neg$, ampak uporablja samo znak za implikacijo $\Rightarrow$): Izjava ne-P je resnična natanko takrat, ko izjava P ni resnična. Izjava P in Q je resnična natanko takrat, ko sta resnični izjavi P in Q. Izjava P ali Q je resnična natanko takrat, ko je resnična vsaj ena od izjav P ali Q. Izjava $P \Rightarrow Q$ je neresnična natanko takrat, ko je P resnična, Q pa neresnična. Nato podrobno razloži, kako se izjave *lingvistično* in *logično* povezujejo s temi logičnimi vezniki.[4] Temu pristopu zavestno daje prednost pred danes bolj uporabljanimi logičnimi (ali pravilnostnimi) tabelami, ki izjavam, sestavljenim iz atomarnih izjav P, Q, R, določijo njihove logične vrednosti (1 ali 0) pri vseh možnih kombinacijah logičnih vrednosti atomarnih izjav. Te tabele naj bi bile primernejše za računalnike kot pa za komunikacijo med ljudmi in se v praksi ne uporabljajo pri argumentaciji oziroma dokazovanju. S pomočjo takšne poglobljene lingvistične in logične interpretacije logičnih veznikov avtor pokaže, kako je mogoče zlahka razrešiti znani Epimenidov

[4] Tako npr. $P \Rightarrow Q$ opiše takole: Iz resnice ob uporabi pravilnega sklepanja sledi samo resnica, medtem ko iz lažne premise P lahko sledi bodisi resničen bodisi lažen sklep Q.

paradoks („Vsi Krečani so lažnivci. Jaz sem Krečan.“), pa tudi t. i. najtežjo logično uganko na svetu (the World's Hardest Logic Puzzle), ki se glasi takole: „Na otoku je 200 popolnih logikov (ljudi, ki vedno govorijo resnico), 100 od njih je modrookih, 100 pa rjavookih. Potem ko logik samo s pomočjo logike določi barvo svojih oči, zapusti otok. Kdaj bodo vsi logiki zapustili otok?“

Naravna števila so v knjigi vpeljana tako rekoč iz nič oziroma iz prazne množice: $1 = card(\{\emptyset\})$, $2 = card(\{\emptyset, \{\emptyset\}\})$, itd. Pri obravnavi teorije množic, ki je temelj knjige, avtor posebej predpostavi, da obstaja matematični univerzum (v kakršnega je verjel že Platon) in da, ko govorimo o množicah, v njih nastopajo le objekti, ki v tem matematičnemu univerzumu dejansko obstajajo.[5] Vendar pa je predpostavka o obstoju matematičnega univerzuma vprašljiva, saj npr. poleg evklidske obstajajo tudi neevklidske geometrije; podobno si je mogoče zamisliti matematiko CH, ki privzema hipotezo kontinuuma (kardinalnost množice realnih števil je „prva večja neskončnost“ od neskončnosti množice naravnih števil) kot veljaven aksiom, in matematiko ne-CH, ki privzame kot aksiom njeno negacijo. Avtor razreši to dilemo tako, da privzame vzporedni obstoj dveh matematičnih univerzumov: matematika CH „živi“ v enem, ne-CH pa v drugem.[6] Misel, da moramo biti vselej, kadar imamo opravka z neskončnostjo, še posebej previdni, ilustrira na primeru neskončnih nekonvergentnih vrst.[7] Seveda ne manjka tudi dokaz trditve, da poljubni dve daljici premoreta „enako mnogo“ točk.

Morda bi avtor lahko navedel nekoliko več referenc (navedenih je le 11 knjig, pa noben članek) in se natančneje skliceval nanje (od kod je kaj). Sicer pa je knjiga privlačen uvod v problematiko neskončnosti v matematiki. Še posebej vredno branja je poglavje o matematični in transfinitni indukciji.

Jurij Kovič

[5] Zdi se, da je glavni namen tega pristopa v tem, da izključi paradoksne pojme, kot je npr. množica vseh množic, ki je zrušil Cantorjevo naivno teorijo množic in terjal, da se množice definira aksiomatsko (npr. Zermelo-Franklova aksiomatizacija). Če imajo namreč množice lahko le elemente, ki dejansko obstajajo v matematičnem univerzumu, se o množici vseh množic, ki tam ne obstaja, sploh nima smisla pogovarjati, in paradoksi, povezani s to množico, enostavno izginejo.

[6] Kot pravi, izrekov teh dveh teorij „ne moremo primerjati nič bolj kot receptov za kruh in torto, pri tem pa trditi, da je eden pravi, drugi pa ne.“

[7] Navaja npr. znani primer vrste $1 - 1 + 1 - 1 \cdots$, ki ob napačnem računanju privede do protislovja: $0 = (1-1) + (1-1) + \cdots = 1 + (-1+1) + (-1+1) = \cdots = 1$.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, SEPTEMBER 2013
Letnik 60, številka 5

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Na levi: Josip Plemelj kot študent na Dunaju leta 1986; na desni: fotokopija naslovne strani originalnega članka profesorja Josipa Plemlja o konstrukciji pravilnega sedemkotnika iz časopisa *Monatshefte für Mathematik und Physik* iz leta 1912.