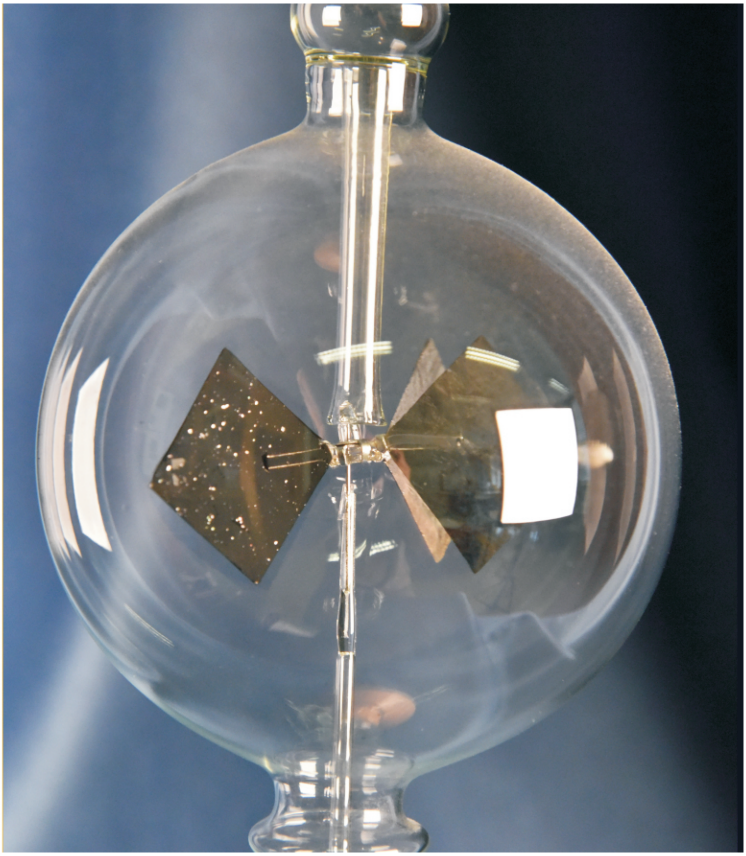
IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2015
Letnik 62
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 62 • ŠT. 4 • STR 121-160 • JULIJ 2015

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JULIJ 2015, letnik 62, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA–založništvo, Jadranska ulica 19, p. p. 2964, 1001 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 553, 4232 460 **Telefaks:** (01) 4232 460, 2517 281 **Elektronska pošta:** zaloznistvo@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** 03100–1000018787 **Mednarodna nakazila:** SKB banka d.d., Ajdovščina 4, 1513 Ljubljana **SWIFT (BIC):** SKBASI2X **IBAN:** SI56 0310 0100 0018 787

Jezikovno pregledal Janez Juvan.
Računalniško stavila in oblikovala Tadeja Šekoranja.
Natisnila tiskarna COLLEGIUM GRAPHICUM v nakladi 1250 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 24 EUR, za druge družinske člane in študente pa 12 EUR. Naročnina za ustanove je 35 EUR, za tujino 40 EUR. Posamezna številka za člane stane 3,19 EUR, stare številke 1,99 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak drugi mesec. Sofinancira jo Javna agencija za raziskovalno dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

 Poštnina plačana pri pošti 1102 Ljubljana

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, klasifikacijo (MSC oziroma PACS) in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

GRÖBNERJEVE BAZE IN REŠEVANJE SISTEMOV NELINEARNIH POLINOMSKIH ENAČB

BRIGITA FERČEC[1,2], MATEJ MENCINGER[3,4]

[1]Center za uporabno matematiko in teoretično fiziko, Univerza v Mariboru
[2]Fakulteta za energetiko, Univerza v Mariboru
[3]Fakulteta za gradbeništvo, prometno inženirstvo in arhitekturo
Univerza v Mariboru
[4]Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko, Ljubljana

Math. Subj. Class. (2010): 13A15, 13B25, 68N30

Obravnavamo Gröbnerjeve baze, ki so pomemben teoretični gradnik moderne teorije polinomskih kolobarjev. Razložimo pomen multideljenja, S-polinoma in Buchbergerjevega algoritma. Opišemo reševanje nekaterih problemov, ki se nanašajo na ideale v polinomskih kolobarjih in se osredotočimo na uporabo pri reševanju sistemov polinomskih enačb ter problemu implicitizacije.

GRÖBNER BASES AND SOLVING NONLINAR POLYNOMIAL SYSTEMS

Gröbner bases, which are an important building block of modern theory of polynomial ring theory, are considered. The meaning of the multidivision, S-polynomial and Buchberger's algorithm is explained. The use of Gröbner bases in some theoretical aspects concerning the ideals in polynomial rings is considered. We are interested in the use of solving polynomial systems and implicitization problem.

Uvod

V grobem lahko rečemo, da uporabo Gröbnerjevih baz najdemo povsod, kjer nastopijo polinomski ideali oz. polinomske enačbe. Torej ne le v matematiki, temveč tudi v številnih drugih vedah – nekaterih inženirskih problemih, kot je na primer robotika [3, pogl. 6]. V matematiki Gröbnerjeve baze nastopijo pri odgovoru na vprašanje, ali je neki polinom element danega ideala, pri problemu enakosti idealov, izračunu preseka dveh ali več idealov in podobno (glej npr. [3, 9]). Teorijo Gröbnerjevih baz je leta 1965 vpeljal Bruno Buchberger [2]. Na teorijo lahko gledamo s stališča posplošitve Evklidovega algoritma, pa tudi kot na posplošitev Gaussove eliminacije linearnega sistema, katere rezultat je (zgornje-) trikotna oblika linearnega sistema. Teorija Gröbnerjevih baz omogoča računanje (deljenje) v kolobarju polinomov več spremenljivk, ki je analogno računanju (deljenju) v polinomskih kolobarjih ene spremenljivke.

Pogosto moramo v praksi rešiti sistem polinomskih enačb (več spremenljivk)

$$f_1(x,y,z)=0,\ f_2(x,y,z)=0,\ f_3(x,y,z)=0 \tag{1}$$

ali pa imamo podano ploskev ali krivuljo v parametrični obliki

$$x = f_1(u,v), \ y = f_2(u,v), \ z = f_3(u,v); \ u, v \in \mathbb{R} \tag{2}$$

ali

$$x = f_1(t), \ y = f_2(t), \ z = f_3(t); \ t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

ali

$$x = f_1(t), \ y = f_2(t); \ t \in \mathbb{R} \tag{4}$$

in želimo zapisati pripadajočo enačbo (enačbi) v implicitni obliki. Poglejmo si dva konkretna motivacijska primera:

Primer 1. a) $x = t^5, \ y = t^2 + 1, \ z = t^3 - 1.$

b) $x = \frac{u+v}{u-v}, \ y = 2\frac{v^2+u^2}{(u-v)^2}, \ z = 2v\frac{v^2+3u^2}{(u-v)^3}.$

c) $x = u + v, \ y = 2uv + v^2, \ z = 3uv^2 + v^3.$

Začnimo s primerom c). Če želimo iz enačb eliminirati parametra u in v, hitro opazimo, da zaradi nelinearnosti naloga ni tako preprosta, kot npr. pri linearnem primeru

$$x = 1 + 2u - v, \ y = u + v, \ z = 2 - u + 3v.$$

Čeprav lahko poskusimo s podobno »strategijo« in iz prvih dveh enačb nekako izrazimo parametra u in v (z x in y) in rezultata vstavimo v tretjo enačbo ter jo preoblikujemo tako, da le-ta ne vsebuje več nobenih korenov – nam po dolgem računanju celo uspe dobiti implicitno enačbo ploskve c):

$$4x^3z + 4y^3 - 3x^2y^2 - 6xyz + z^2 = 0.$$

V nadaljevanju tega članka želimo ugotoviti, ali lahko zgornjo enačbo dobimo z metodo, podobno Gaussovi eliminaciji, oz. z neke vrste metodo nasprotnih koeficientov.

Nadaljujmo s krivuljo a), kjer nastopajo t^5, t^2 in t^3. Spodnja računa ne potrebujeta dodatnih pojasnil, saj sta precej očitna: $t^{5\cdot 2} = x^2$ in $t^{2\cdot 5} = (y-1)^5$, zato je $(y-1)^5 - x^2 = 0$ in $t^{5\cdot 3} = x^3$, $(z+1)^5 = t^{3\cdot 5}$, zato je $(z+1)^5 - x^3 = 0$. Tako dobljeni enačbi zagotovo pomenita implicitno enačbo krivulje a), ki pa verjetno ni »najboljša možna« v smislu največje potence spremenljivk, ki v implicitnih enačbah nastopajo. Hitro lahko preverimo, da je ena od možnosti tudi $y^3 - 3y^2 + 3y - z^2 - 2z - 2 = 0$ in $yz + y - z - x - 1 = 0$ (z najvišjo potenco 3).

Nazadnje poglejmo še točko b):

$$x = \frac{u+v}{u-v}, \ y = 2\frac{v^2+u^2}{(u-v)^2}, \ z = 2v\frac{v^2+3u^2}{(u-v)^3}.$$

Hitro lahko preverimo, da z uvedbo nove spremenljivke $t = \frac{u+v}{u-v}$ enačbe b) postanejo »enoparametrične«: $x = t$, $y = t^2 + 1$, $z = t^3 - 1$, kar pomeni, da imamo za neskončno različnih vrednosti u in v isto vrednost t; torej se pri implicitizaciji lahko pojavi »problem inverza«, ki algebrsko pomeni problem neodvisnosti parametrov u in v (podrobnosti najdete v [6]).

Zgoraj naštete probleme uspešno reši teorija Gröbnerjevih baz, ki npr. polinomom $x-t^5, y-t^2-1, z-t^3+1$ priredi polinome $-2+3y-3y^2+y^3-2z-z^2, 1+x-y+z-yz, -1+t+2y-y^2+tz$, $-1-t+ty-z, 1+t^2-y$, ki predstavljajo njihovo Gröbnerjevo bazo. Če bi bili eliminacijski problemi iz primera 1 linearni, bi bil rang razširjene matrike pripadajočega sistema manjši od števila neznank v sistemu. Če za linearni sistem velja, da sta ranga (pripadajoče) matrike sistema in razširjene matrike sistema enaka številu neznank, je rešitev enolična.

V nadaljevanju bomo videli, da je edina ustrezna posplošitev Gaussove eliminacije za nelinearne polinomske sisteme iskanje Gröbnerjeve baze sistemu pripadajočega ideala (polinomov sistema). Iz »novega« eliminacijskega postopka mora biti na koncu tudi razvidno, ali je rešitev v obliki izoliranih točk, ali pa so rešitve krivulje, ploskve (tj. kakšna raznoterost pripada sistemu enačb). Osnovna ideja pri reševanju sistema (1) temelji na tako imenovanih S-polinomih in spominja na (srednješolsko) metodo nasprotnih koeficientov, zato ni presenetljivo, da pri tej teoriji postane pomembno tako imenovano »multideljenje« (posplošitev deljenja polinomov ene spremenljivke), kjer želimo polinom $f(x_1, \ldots, x_n)$ deliti z več polinomi $p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n)$. Kot bomo videli, dobimo pri takem deljenju ustrezne koeficiente $q_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, q_k(x_1, \ldots, x_n)$ ter (enoličen) ostanek $r(x_1, \ldots, x_n)$

$$f = q_1 p_1 + \cdots + q_k p_k + r,$$

kar bo podrobneje opisano v naslednjem poglavju.

Primer 2. Motivacijo končajmo z dvema sistemoma oblike (1):

(A) $f_1 = -xy^3 - y^2 z + yz^2 + \mathbf{2} xz^3$, $f_2 = z^2 + xy + z$, $f_3 = y^2 + xz + y$;

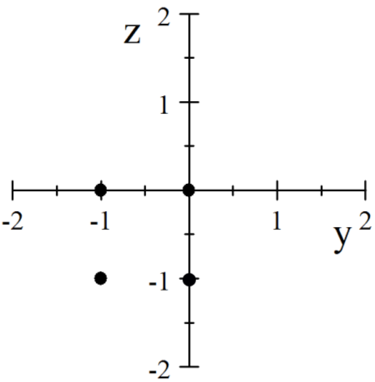
(B) $g_1 = -xy^3 - y^2 z + yz^2 + \mathbf{1} xz^3$, $f_2 = z^2 + xy + z$, $f_3 = y^2 + xz + y$.

Po eni strani (npr. po videzu) sta si sistema (A) in (B) zelo podobna, saj se razlikujeta le v enem koeficientu (prikazan z debelejšo pisavo). Po drugi strani pa sta sistema (A) in (B) bistveno različna, saj ima sistem (A) končno mnogo rešitev (rešitve so izolirane) za z, medtem ko ima sistem (B) za z neizolirane rešitve (jih je neskončno mnogo). Za zdaj povejmo, da razlog za to tiči v tem, da je $g_1 = -y^2 f_2 + z^2 f_3$, čemur v nadaljevanju pravimo, da je g_1 v idealu, ki ga tvorita f_2 in f_3, oziroma da se deljenje polinoma g_1 z množico $\{f_2, f_3\}$ »izide«, medtem ko za f_1 velja

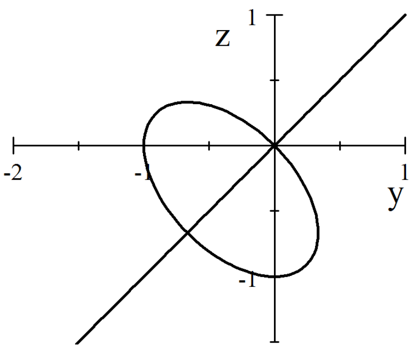
$$f_1 = -y^2 f_2 + z^2 f_3 + xz^3,$$

čemur v nadaljevanju pravimo, da f_1 ni element ideala, ki ga tvorita f_2 in f_3, oziroma da se deljenje polinoma f_1 z množico $\{f_2, f_3\}$ »ne izide« (ostanek $r = xz^3$ je neničeln). Oboje lahko enostavno preverimo. Na koncu »izdajmo«, da je Gröbnerjeva baza množice polinomov $\{f_1, f_2, f_3\}$ (kar bomo definirali kasneje), če damo spremenljivki x »večji pomen« kot spremenljivki y in obema »večji pomen« kot spremenljivki z, enaka $G_A = \{z^4 + z^5, z^3 + yz^3 + z^4 + yz^4, yz^2 + y^2z^2, y^2 + y^3 - z^2 - z^3, y + y^2 + xz, xy + z + z^2\}$, medtem ko je Gröebnerjeva baza množice polinomov $\{g_1, f_2, f_3\}$ enaka $G_B = \{y^2 + y^3 - z^2 - z^3, y + y^2 + xz, xy + z + z^2\}$. Če za zdaj na Gröbnerjevo bazo pogledamo kot na preoblikovanje sistema $f_1 = 0, f_2 = 0, f_3 = 0$ tako, da vedno ohranimo množico rešitev sistema, je očitno, da ima sistem (A) glede na neznanko z izolirane (realne) rešitve $z_{1,2,3,4} = 0$ in $z_5 = -1$ (kot sledi iz prve enačbe $z^4 + z^5 = 0$), medtem ko ima sistem (B) rešitve na krivulji $\widetilde{y}^2 + \widetilde{y}^3 - \widetilde{z}^2 - \widetilde{z}^3 = 0$ (glej sliko 1b), torej so rešitve oblike $\left(-\frac{\widetilde{y} + \widetilde{y}^2}{\widetilde{z}}, \widetilde{y}, \widetilde{z}\right)$, če je $\widetilde{z} \neq 0$, ter $(\widetilde{x}, 0, 0)$ oziroma $(0, -1, 0)$ sicer. Na sliki 1a so v (y, z)-ravnini prikazane rešitve sistema (A); hitro lahko preverimo, da rešitev sestavljajo izolirane točke $(0, -1, 0)$, $(0, -1, -1)$, $(0, 0, -1)$ ter premica $(x, 0, 0)$.

Osnovna ideja Gröbnerjevih baz je posplošiti korak v klasičnem algoritmu Gaussove eliminacije, kjer npr. par polinomov $f = 5x + 2y - z - 1$ in $g = 3x + 4y - 2z - 2$ zamenjamo z ekvivalentnim parom polinomov $f = 5x + 2y - z - 1$ in $S_{f,g} = 7z - 14y + 7$. Če koeficiente monomov



(a) Rešitev sistema (A).



(b) Rešitev sistema (B).

Slika 1. Primer 2: rešitve projicirane na ravnino $x = 0$.

polinomov f in g zapišemo v prvo vrstico matrike, dobimo matriko

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

kjer sta v prvem stolpcu matrike koeficienta pred spremenljivko x, v drugem stolpcu sta koeficienta pred spremenljivko y, v tretjem stolpcu sta koeficienta pred spremenljivko z, v četrtem stolpcu pa stojita prosta člena obeh polinomov. Sedaj s pomočjo Gaussove metode (nasprotni koeficienti) eliminiramo spremenljivko x v drugem polinomu, in sicer pomnožimo prvo vrstico matrike s 3 in drugo z -5 ter obe vrstici seštejemo, da dobimo

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -14 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Poudarimo, da smo zadnjo vrstico dobili z metodo nasprotnih koeficientov:

$$S_{f,g} = \frac{15}{5}(5x + 2y - z - 1) - \frac{15}{3}(3x + 4y - 2z - 2) = -14y + 7y + 7.$$

V nadaljevanju tega poglavja bomo podali nekaj definicij, ki pomagajo razumeti pomen Gröbnerjevih baz. Več podrobnosti in splošnejši pristop najdete na primer v [3, 9]. Obravnavajmo polinome f spremenljivk $x_1, \ldots, x_n$ s koeficienti iz polja k:

$$f = \sum_{\alpha \in S} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

kjer je S končna podmnožica množice $\mathbb{N}_0^n$ in $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Pravimo, da je $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ *monom*, $a_\alpha \in k \setminus \{0\}$ *koeficient* in $a_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ *člen* polinoma. Množico vseh polinomov spremenljivk $x_1, \ldots, x_n$ s koeficienti iz k označimo s $k[x_1, \ldots, x_n]$. Z operacijama seštevanje in množenje polinomov je $k[x_1, \ldots, x_n]$ komutativen kolobar. Nadalje rečemo, da je $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ *stopnja monoma* ter $\mathrm{st}(f) = \max\{|\alpha| : \alpha \in S\}$ stopnja polinoma. Za vsako naravno število n je $k^n = \{(a_1, \ldots, a_n) : a_1, \ldots, a_n \in k\}$ *afin prostor* dimenzije n. Množica polinomov $f_1, \ldots, f_s$ je naravno povezana s sistemom enačb $f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, f_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, f_s(x_1, \ldots, x_n) = 0$, kar zapišemo krajše:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}. \tag{5}$$

Množica vseh rešitev sistema (5) je definirana kot *afina raznoterost*, določena s polinomi $f_1, \ldots, f_s$:

$$\mathbf{V}(f_1, \ldots, f_s) = \{(a_1, \ldots, a_n) \in k^n : f_j(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ za } 1 \leq j \leq s\}.$$

Ideal v $k[x_1, \ldots, x_n]$ je podmnožica I kolobarja $k[x_1, \ldots, x_n]$, ki zadošča naslednjima pogojema:

(i) če sta $f, g \in I$, potem je $f + g \in I$ in

(ii) če je $f \in I$ in $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$, je $hf \in I$.

Kot najpreprostejši primer ideala v $k[x_1, \ldots, x_n]$ vzemimo množico vseh možnih linearnih kombinacij, ki lahko nastanejo iz polinomov $f_1, \ldots, f_s$:

$$\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{s} h_j f_j : h_1, \ldots, h_s \in k[x_1, \ldots, x_n] \right\}.$$

Ta množica je ideal, ki mu pravimo *ideal, generiran s polinomi* $f_1, \ldots, f_s$. Če je ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ generiran s končno mnogo elementi $f_1, \ldots, f_s$, pravimo, da je I *končno generiran ideal.* Potem je $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ in množica $\{f_1, \ldots, f_s\}$ se imenuje *baza* ideala I. Na primer, baza ideala $\langle f_1, f_2, f_3 \rangle$ iz primera 2 (A) je $\{f_2, f_3\}$, baza ideala $\langle g_1, f_2, f_3 \rangle$ iz primera 2 (B) pa je $\{g_1, f_2, f_3\}$. Po izreku o Hilbertovi bazi (glej npr. [3, str. 74: Theorem 4]) je vsak polinomski ideal v kolobarju $k[x_1, \ldots, x_n]$ končno generiran. Ekvivalentno, vsaka naraščajoča veriga idealov $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$ v $k[x_1, \ldots, x_n]$ se ustali [9, str. 4: Corollary 1.1.7], kar pomeni, da obstaja takšen $m \geq 1$, da je $I_j = I_m$ za vsak $j > m$.

Algebraična geometrija, ki obravnava zveze med algebro (ideali) in geometrijo (afine raznoterosti), je zelo obširna (glej npr. [3, 9]). Glavno vlogo pri tem imata »naravni« preslikavi, $\mathbf{V}$ ($\mathbf{I}$), med množicama vseh afinih raznoterosti $\mathbb{V}$ in vseh idealov $\mathbb{I}$ ter radikal ideala.

Preslikava $\mathbf{I} : \mathbb{V} \to \mathbb{I}$ je definirana z

$$\mathbf{I}\,(V) = \{f \in k\,[x_1, \ldots, x_n] : f\,(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ za vse } (a_1, \ldots, a_n) \in V\}\,. \tag{6}$$

Preslikava $\mathbf{V} : \mathbb{I} \to \mathbb{V}$ je definirana z

$$\langle f_1, \ldots, f_k \rangle \longmapsto \mathbf{V}\,(f_1, \ldots, f_k)\,, \tag{7}$$

kjer je $\mathbf{V}\,(f_1, \ldots, f_k)$ tako imenovana ničelna množica polinomov $f_1, \ldots, f_k$ (torej rešitev sistema $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$).

Radikal ideala I, ki ga označimo s $\sqrt{I}$, je definiran takole:

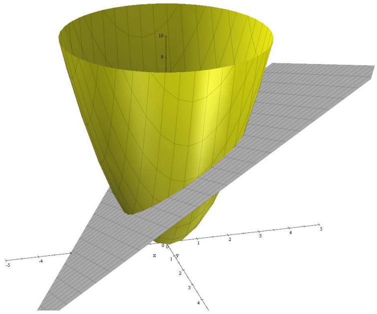
$$\sqrt{I} = \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] : \text{obstaja tak } p \in \mathbb{N}, \text{ da je } f^p \in I\}.$$

Ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ je *radikalni ideal*, če je enak svojemu radikalu:

$$I = \sqrt{I}.$$

Zvezo med algebro in geometrijo si bomo ogledali na primeru vsote in produkta idealov, ki imata tu zanimivo in pomembno vlogo, ki sledi iz formul za raznoterost vsote in produkta idealov:

$$\mathbf{V}\,(I + J) = \mathbf{V}\,(I) \cap \mathbf{V}\,(J)\,, \tag{8}$$



Slika 2. Ploskvi $\mathbf{V}(I)$ in $\mathbf{V}(J)$ iz primera 3.

$$\mathbf{V}\left(I \cdot J\right) = \mathbf{V}\left(I\right) \cup \mathbf{V}\left(J\right). \tag{9}$$

Vsota, $I + J$, idealov I in J je ideal, definiran z vsemi možnimi vsotami elementov iz obeh idealov:

$$I + J := \left\{f + g : f \in I, g \in J\right\},$$

produkt, $I \cdot J$, idealov I in J je ideal, definiran z (vsemi) vsotami produktov, kjer nastopajo faktorji iz obeh idealov:

$$I \cdot J := \left\{f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r : f_1, \ldots, f_r \in I, g_1, \ldots, g_r \in J, r \in \mathbb{N}\right\}.$$

Če sta $I = \langle f_1, \ldots, f_k\rangle$ in $J = \langle g_1, \ldots, g_s\rangle$, sta vsota $I + J$ in produkt $I \cdot J$ generirana tako (glej npr. [3, str. 181–183])

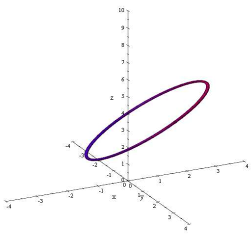
$$\begin{aligned} I + J &= \langle f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_s\rangle \text{ in} \\ I \cdot J &= \langle f_i g_j : 1 \le i \le k, 1 \le j \le s\rangle, \end{aligned}$$

torej je $\langle f_1\rangle + \cdots + \langle f_k\rangle = \langle f_1, \ldots, f_k\rangle$. Geometrijska pomena enačb (8) in (9) si oglejmo na enostavnih primerih.

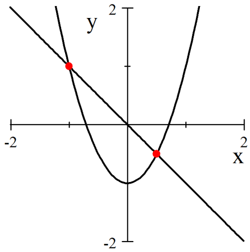
Primer 3. Naj bosta $I = \langle x + 2y + 6 - 2z\rangle$ in $J = \left\langle x^2 + y^2 - z\right\rangle$ ideala v $\mathbb{R}\left[x, y, z\right]$. Tedaj je $I + J = \left\langle x + 2y + 6 - 2z, x^2 + y^2 - z\right\rangle$ in $\mathbf{V}\left(I + J\right) = \mathbf{V}\left(I\right) \cap \mathbf{V}\left(J\right)$, kot je prikazano na slikah 2 in 3.

Primer 4. Naj bosta $I = \left\langle (x + y)^2, 2x^2 - y - 1\right\rangle$ in $J = \left\langle x + y, x^3 + 2y\right\rangle$ ideala v $\mathbb{R}\left[x, y\right]$. Tedaj je

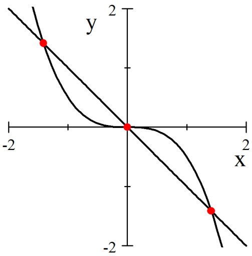
$$I \cdot J =$$
$$\left\langle (x + y)^3, (x + y)^2\left(x^3 + 2y\right), \left(2x^2 - y - 1\right)(x + y), \left(2x^2 - y - 1\right)\left(x^3 + 2y\right)\right\rangle$$



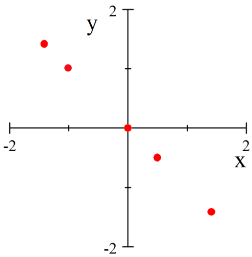
Slika 3. Presek ploskev $\mathbf{V}(I)$ in $\mathbf{V}(J)$ iz primera 3.



Slika 4. Raznoterost $\mathbf{V}(I)$ iz primera 4 (dve točki).



Slika 5. Raznoterost $\mathbf{V}(J)$ iz primera 4 (tri točke).



Slika 6. Raznoterost $\mathbf{V}(I \cdot J)$ iz primera 4 (pet točk).

in

$$\mathbf{V}(I \cdot J) = \mathbf{V}(I) \cup \mathbf{V}(J),$$

kar je prikazano na slikah 4, 5 in 6. **Opomba:** Raznoterost $\mathbf{V}(I \cdot J)$ je določena z $x + y = 0$ in $(2x^2 - y - 1)(x^3 + 2y) = 0$, kar nam da pet točk na sliki 6.

V nadaljevanju opozorimo na pomen preslikav (6) in (7). Vemo, da vsaka raznoterost V določa neki ideal $\mathbf{I}(V)$ in vsak ideal I določa neko raznoterost $\mathbf{V}(I)$. Če velja $\mathbf{I}(V_1) = \mathbf{I}(V_2)$, je nujno $V_1 = V_2$, toda če je $\mathbf{V}(I_1) = \mathbf{V}(I_2)$, ni nujno, da je $I_1 = I_2$. Najpreprostejši tak par je $I_1 = \langle x \rangle$ in $I_2 = \langle x^2 \rangle$. Tudi za $f_1 = x^2 - y^2$ in $f_2 = (x - y)^2 (x + y)$ velja $I_1 = \langle f_1 \rangle$, $I_2 = \langle f_2 \rangle$ in $I_1 \neq I_2$, toda $\mathbf{V}(I_1) = \mathbf{V}(I_2)$. Iz enakosti raznoterosti pa sledi, da sta pripadajoča radikala enaka, $\sqrt{I_1} = \sqrt{I_2}$. O tem govori tako imenovani Hilbertov Nullstellensatz [3, str. 170–171].

Izrek 1 (Krepki Hilbertov Nullstellensatz). *Naj bo $\mathbb{A}^n$ afin prostor nad algebraično zaprtim poljem k in naj bo I ideal v $k[x_1, \ldots, x_n]$. Tedaj za vsak ideal $I \in k[x_1, \ldots, x_n]$ velja*

$$\mathbf{I}(\mathbf{V}(I)) = \sqrt{I}.$$

V nadaljevanju želimo natančno definirati Gröbnerjevo bazo in s tem povezano (že omenjeno) »multideljenje«. Zato najprej definirajmo *monomsko ureditev*, $<$, v $k[x_1, \ldots, x_n]$ kot relacijo dobre ureditve $<$ v množici $\mathbb{N}_0^n$ z naslednjima dvema lastnostma:

(i) vsaka neprazna podmnožica monomov ima najmanjši element in

(ii) če velja $x^\alpha < x^\beta$, potem velja $x^\alpha x^\gamma < x^\beta x^\gamma$ za vsak monom x^γ.

Najbolj običajna in splošno znana monomska ureditev je *leksikografska ureditev*: obravnavajmo monome $x_1^2x_2^8x_3^{50}$, $x_1^3x_2^2x_3^5$, $x_1^2x_2^9x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$ in recimo, da je x_1 »pomembnejši« od x_2 (in x_3) in da je x_2 »pomembnejši« kot x_3. Potem je

$$x_1^3x_2^2x_3^5 > x_1^2x_2^9x_3^4 > x_1^2x_2^8x_3^{50}.$$

Splošno je $x^\alpha < x^\beta$ natanko tedaj, ko prvi koordinati α_i in β_i od leve proti desni v α in β, ki sta različni, zadoščata $\alpha_i < \beta_i$. Obstaja še veliko drugih monomskih ureditev: inverzna leksikografska, stopenjsko inverzna leksikografska itd. (glej npr. [3, 9]). Če imamo opravka z več različnimi ureditvami, lahko poudarimo ime monomske ureditve. Na primer, leksikografsko ureditev označimo z $<_{lex}$.

Ko je monomska ureditev izbrana, lahko govorimo o *vodilnem monomu* (LM), *vodilnem členu* (LT) in *vodilnem koeficientu* (LC) polinoma. Vodilni člen je definiran kot največji monom (glede na izbrano ureditev). Na primer, če je $f = -x_1^2x_2^8x_3^{50} + 2x_1^3x_2^2x_3^5 + 3x_1^2x_2^9x_3^4$ in je ureditev leksikografska, je vodilni člen polinoma f enak $LT(f) = 2x_1^3x_2^2x_3^5$, medtem ko je njegov vodilni koeficient enak $LC(f) = 2$, vodilni monom pa je $LM(f) = x_1^3x_2^2x_3^5$.

Omenimo tudi, da poljuben vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ določa monomsko ureditev $<_{\vec{c}}$ v $\mathbb{R}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ na naslednji način:

$$x^\alpha < x^\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{c}\alpha < \vec{c}\beta & \text{ali} \\ \vec{c}\alpha = \vec{c}\beta & \text{in} \quad \alpha <_{lex} \beta, \end{cases}$$

kjer $\vec{c}\alpha$ označuje standardni skalarni produkt vektorjev, $\vec{c}\alpha = \sum_i c_i\alpha_i$. Monomsko ureditev $<_{\vec{c}}$, definirano z vektorjem $\vec{c}$, imenujemo *utežena monomska ureditev*. Na primer, če je $\vec{c} = (2, 3, 20)$, je $x_1^8x_2^1x_3^2 <_{\vec{c}} x_1^1x_2^1x_3^3$, saj je $\vec{c}\alpha = (2, 3, 20) \cdot (8, 1, 2) = 59$ in $\vec{c}\beta = (2, 3, 20) \cdot (1, 1, 3) = 65$. Opazimo, da je glede na ureditev $<_{\vec{c}}$ vodilni člen polinoma $g = 7x_1^8x_2^1x_3^2 - 8x_1^1x_2^1x_3^3$ enak $LT(g) = -8x_1^1x_2^1x_3^3$, medtem ko je vodilni člen $LT(g)$ glede na $<_{lex}$ enak $7x_1^8x_2^1x_3^2$.

Ko sta kolobar in monomska ureditev izbrana, lahko delimo polinom s polinomom ali celo z (urejeno) množico polinomov, kar lahko imenujemo tudi »multideljenje«. Posplošitev procesa Gaussove eliminacije za reševanje sistema (5) namreč zahteva deljenje polinoma z množico polinomov. Dobro poznane elementarne vrstične operacije Gaussove eliminacije temeljijo na dejstvu, da na vsakem koraku, j, Gaussove eliminacije za $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$ množica rešitev spremenjenega sistema ostane enaka množici rešitev začetnega sistema. Spomnimo se primera: v smislu oznake $\vec{f_j}(\vec{x}) = \vec{0}$ je bil začetni sistem

$$f_0 = 5x + 2y - z - 1,$$
$$g_0 = 3x + 4y - 2z - 2.$$

Nadomestili smo ga s $f_1 = f_0$ in $g_1 = S_{f,g} = 7z - 14y + 7$. Opazimo, da je $g_1 = 3f_0 - 5g_0$, kar pomeni, da iz $f_0(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$ in $g_0(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$ (za neki par $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$), sledi enakost $g_1(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 0$ (za isti par $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$). Osnovna ideja je, da lahko zamenjamo začetni par f_0, g_0 s f_1, g_1 in sta oba polinoma f_1 in g_1 »deljiva« z množico začetnih polinomov f_0, g_0:

$$f_1 = 1f_0 + 0g_0 \quad \text{in} \quad g_1 = 3f_0 - 5g_0.$$

Kot bomo videli v naslednjem poglavju (glej tudi [3]), deljenje polinomov z množico polinomov (v smislu zgornjih enakosti) vodi k definiciji Gröbnerjevih baz.

Deljenje polinomov z množico polinomov

Polinom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ želimo deliti z množico polinomov $f_1, \ldots, f_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$, pri čemer želimo proces in sam smisel deljenja »ohraniti« čim bolj podoben tistemu pri deljenju polinomov ene spremenljivke. Začnimo s primerom:

Primer 5. Naj bo $f_1 = XY + Y$, $f_2 = X^2 + Y$ in $f = X^2Y + XY^2$ in izberimo leksikografsko ureditev $X > Y$. Če f delimo z urejeno množico (f_1, f_2), pričakujemo rezultat oblike $f = q_1 f_1 + q_2 f_2 + r$.

Zapis sheme multideljenja je skladen s shemo multideljenja v [9, str. 14]. Oznaka $\sqrt{f}$ pomeni, da je f polinom, ki ga delimo z množico polinomov (f_1 in f_2).

Oba vodilna člena $LT(f_1) = XY$ in $LT(f_2) = X^2$ delita vodilni člen $LT(f) = X^2Y$. Toda ker je v urejeni množici (f_1, f_2), s katero delimo, najprej naveden f_1, delimo X^2Y z XY in dobimo X, ki ga zapišemo h kvocientu q_1. Nato pomnožimo X s f_1 in rezultat podpišemo pod polinom f, od katerega slednjega tudi odštejemo. Dobimo polinom $XY^2 - XY$, katerega vodilni člen delimo z $LT(f_1)$ in dobimo Y, ki ga pripišemo h q_1. Postopek ponovimo in nov polinom, ki ga delimo z $LT(f_1)$ ali $LT(f_2)$, je $-XY - Y^2$. Njegov vodilni člen je prav tako deljiv z $LT(f_1)$: faktor -1 pripišemo h q_1. Na koncu dobimo polinom $-Y^2 + Y$, katerega vodilni člen ni več deljiv niti z $LT(f_1)$ niti z $LT(f_2)$, zato vodilni člen $-Y^2$ pripišemo v desni stolpec kot ostanek in ostane polinom Y, ki ga pa prav tako pripišemo k ostanku. Nazadnje h q_2 pripišemo 0 in polinom $-Y^2 + Y$ je (končni) ostanek, r, pri tem multideljenju. Celotna shema multideljenja je taka:

$$
\begin{array}{rlcl}
q_1 : & X + Y - 1 & & \\
q_2 : & 0 & & \underline{r\quad} \\
f_1 : XY + Y & \sqrt{X^2Y + XY^2} & & \\
f_2 : X^2 + Y & \underline{X^2Y + XY} & & \\
 & \quad \underline{XY^2 - XY \qquad\qquad} & & \\
 & \qquad\quad XY^2 - XY & & \\
 & \qquad\quad \underline{XY^2 + Y^2 \qquad\quad} & & \\
 & \qquad\qquad\quad -XY - Y^2 & & \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{-XY - Y} & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad \underline{-Y^2 + Y} & & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{Y} & \to & -Y^2 \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad 0 & \to & -Y^2 + Y,
\end{array}
$$

kar pomeni

$$f = (X + Y - 1)f_1 + 0f_2 - Y^2 + Y.$$

Po drugi strani, če zamenjamo »vrstni red« polinomov f_1 in f_2, torej če delimo z urejeno množico (f_2, f_1), s podobnim izračunom kot zgoraj dobimo

$$f = Yf_1 + Yf_2 - 2Y^2.$$

Očitno je rezultat tovrstnega deljenja zelo odvisen od vrstnega reda polinomov, s katerimi delimo, saj lahko sprememba vrstnega reda spremeni tako vrednosti kvocientov q_1, q_2 kot tudi vrednost ostanka r. Ko delimo polinom f z množico polinomov $F = (f_1, f_2)$, lahko pišemo $f = \{\{q_1, q_2\}, r\}$ namesto $f = q_1f_1 + q_2f_2 + r$. Z uporabo teh simbolov lahko prvi primer zapišemo kot $f = \{\{X + Y - 1, 0\}, -Y^2 + Y\}$, drugi primer pa pomeni $f = \{\{Y, Y\}, -2Y^2\}$. Omenimo še, da je rezultat v osnovi odvisen tudi od izbire ureditve monomov. Če izberemo leksikografsko ureditev $Y > X$, je rezultat deljenja spet drugačen, kar je razvidno iz naslednjega primera, ki ga izvedemo s pomočjo sistema računske algebre `Mathematica`. V programu Mathematica se procedura deljenja polinoma $f(x_1, \ldots, x_k)$ z množico polinomov $\{f_1, \ldots, f_n\}$ (upoštevajoč ureditev $x_1 > \ldots > x_k$) izvede z ukazom `PolynomialReduce`$[f, \{f_1, \ldots, f_n\}, \{x_1, \ldots, x_k\}]$. Rezultat je oblike $\{\{q_1, \ldots, q_n\}, r\}$ in pomeni $f = q_1f_1 + q_2f_2 + \cdots + q_sf_s + r$. Na primer: `PolynomialReduce`$[X^2Y + XY^2, \{XY + Y, X^2 + Y\}, \{Y, X\}]$ nam vrne $\{\{-2 + 2X + Y, 2 - Y\}, -2X^2\}$, kar pomeni $X^2Y + XY^2 = (2X + Y - 2) \cdot (XY + Y) + (-Y + 2) \cdot (X^2 + Y) - 2X^2$.

Iz primera 5 je razvidno, da lahko smiseln rezultat v zvezi z deljenjem polinoma z množico polinomov podamo samo pri vnaprej izbrani ureditvi in pri vnaprej izbranem vrstnem redu polinomov v množici, s katero delimo. Multideljenje je smiselno definirati, kot kaže spodnji algoritem, ki je povzet po [9, str. 12].

Preden zapišemo algoritem, zapišimo definicijo reduciranosti ostanka r pri deljenju polinoma z množico polinomov.

Definicija 1. Naj bodo $f, f_1, \ldots, f_s \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $f_j \neq 0$ (za $1 \leq j \leq s$) in naj bo $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$. Ostanek $r \in k[x_1, \ldots, x_n]$ je reduciran glede na F, če je bodisi $r = 0$ bodisi noben monom, ki nastopi v polinomu r, ni deljiv z nobenim elementom množice $\{LM(f_1), \ldots, LM(f_s)\}$, tj. r ima manjšo stopnjo kot katerikoli polinom $f_1, \ldots, f_s$.

Sedaj si poglejmo algoritem multideljenja. V algoritem vstavimo $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ in urejeno množico $F = (f_1, \ldots, f_s) \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$. Rezultat algoritma so takšni polinomi $q_1, \ldots, q_s, r \in k[x_1, \ldots, x_n]$, da velja:

(i) $f = q_1 f_1 + \cdots + q_s f_s + r$,

(ii) r je reduciran glede na $(f_1, \ldots, f_s)$,

(iii) $\max (LM(q_1) LM(f_1), \ldots, LM(q_s) LM(f_s)) = LM(f)$.

*Algoritem 1 (**Multideljenje**).* Koraki algoritma v psevdokodu:

POSTAVI
$q_1 := 0, \ldots, q_s := 0, h := f$
DOKLER $h \neq 0$ **DELAJ:**
  ČE
  obstaja j tak, da $LM(f_j)$ deli $LM(h)$
  POTEM
  Za najmanjši j, za katerega $LM(f_j)$ deli $LM(h)$:
  $q_j := q_j + \frac{LT(h)}{LT(f_j)}$, $h := h - \frac{LT(h)}{LT(f_j)} f_j$
  SICER
  $r := r + LT(h)$, $h := h - LT(h)$.

Zgornji algoritem je osnova za naslednji izrek, ki je povezan z deljenjem polinoma z množico polinomov.

Izrek 2. *Naj bo podana (urejena) množica polinomov $F = (f_1, \ldots, f_s)$. Naj bo v kolobarju $k[x_1, \ldots, x_n]$ izbrana monomska ureditev $<$. Tedaj lahko vsak polinom $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ zapišemo v obliki*

$$f = q_1 f_1 + \cdots + q_s f_s + r,$$

kjer je r reduciran glede na $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$.

Dokaz lahko najdete na primer v [3, str. 62–63]. Če dobimo pri deljenju polinoma f z urejeno množico polinomov F ostanek r, to običajno krajše zapišemo takole:

$$f \xrightarrow{F} r.$$

V nadaljevanju želimo uporabiti algoritem multideljenja za rešitev nekaterih (dobro znanih) teoretičnih problemov teorije polinomskih kolobarjev (kot je na primer problem članstva v idealu in njegovem radikalu). Vemo, da ničeln ostanek pri deljenju polinoma f s polinomi $f_1, \dots, f_s$ pomeni $f \in I$. Obrat tedaj ne velja (vedno). Četudi ima f pri deljenju s $f_1, \dots, f_s$ neničeln ostanek, lahko obstaja deljenje polinoma f s polinomi $f_1, \dots, f_s$ (v drugem vrstnem redu), ki da ostanek 0, saj smo videli, da ostanki (dokler ni izbrana monomska ureditev) niso enolično določeni. Poglejmo primer:

Primer 6. Naj bo $f = x^2y + xy + 2x + 2$, $f_1 = x^2 - 1$ in $f_2 = xy + 2$. Izberimo leksikografsko ureditev $x > y$. Potem z algoritmom multideljenja dobimo

$$f = yf_1 + f_2 + (2x + y).$$

Ostanek $r = 2x+y$ je neničeln in tako bi lahko zaključili, da $f \notin \langle f_1, f_2 \rangle$. Če pa spremenimo vrstni red deliteljev f_1 in f_2, imamo $f \xrightarrow{F} 0$ za $F = (f_2, f_1)$, saj je

$$f = 0f_1 + (x + 1)f_2 + 0,$$

kar pomeni $f \in \langle f_1, f_2 \rangle$.

Kot bomo videli kasneje, lahko težave, ki so nakazane v primeru 6, odpravimo z definicijo Gröbnerjevih baz.

Gröbnerjeve baze in njihova uporaba

Gröbnerjeva baza ideala $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ je posebna množica $\{g_1, \dots, g_t\}$, za katero algoritem 1 (multideljenje) iz prejšnjega poglavja za poljuben polinom f vrne ostanek $r = 0$ natanko tedaj, ko je $f \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$. Natančneje: Gröbnerjeva baza ideala $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ je končna podmnožica $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ ideala I z lastnostjo

$$\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle.$$

Spodnji izrek je splošno znan (glej npr. [3, str. 75]). Poudarimo, da je funkcija LT (in LM) smiselna samo pri izbrani (znani) monomski ureditvi $<$.

Izrek 3. *Vsak neničelni ideal $I \subset k[x_1, \dots, x_n]$ ima Gröbnerjevo bazo.*

Če je $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ Gröbnerjeva baza ideala I, je očitno ostanek vsakega polinoma $f \in I$ pri multideljenju enoličen. Če je $f = q_1 g_1 + \cdots + q_t g_t + r$ in $f = q_1' g_1 + \cdots + q_t' g_t + r'$, potem je $r - r' = (q_1 - q_1')g_1 + \cdots + (g_t - q_t')g_t \in I$. Če je $r - r' \neq 0$, je $LT(r - r') \in \langle LT(I) \rangle$, kar pomeni, da $LT(g_i)$ deli $LT(r - r')$ za neki i. To je protislovje, saj noben člen ostankov r in r' ni deljiv z $LT(g_i)$ za noben $i = 1, \dots, t$. Zato je $r = r'$ in $q_i = q_i'$ za vsak $i = 1, \dots, t$.

Gröbnerjeva baza je tesno povezana s tako imenovanim *S-polinomom* za dan par polinomov $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$; gre za posplošitev S-polinoma, definiranega v uvodu. Naj bosta $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$ neničelna polinoma. Najmanjši skupni večkratnik njunih vodilnih monomov naj bo $LCM(LM(f), LM(g)) = x^\gamma$. Potem je S-polinom polinomov f in g definiran kot

$$S_{f,g} = \frac{x^\gamma}{LT(f)} \cdot f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} \cdot g.$$

Opazimo, da S-polinomi poskrbijo za eliminacijo vodilnih členov in so v bistvu edini način, da se ta eliminacija zgodi med seštevanjem členov iste stopnje.

Buchbergerjeva osnovna ideja pri definiciji Gröbnerjevih baz je bil naslednji kriterij. Naj bo I ideal. Potem je $G = \{g_1, \dots, g_t\}$ Gröbnerjeva baza ideala I natanko tedaj, ko je za vsak $i \neq j$ ostanek deljenja polinoma S_{g_i,g_j} z G enak nič:

$$S_{g_i,g_j} \xrightarrow{G} 0.$$

Buchbergerjev algoritem, ki je prikazan v nadaljevanju, je povzet po [9]; prvič je bil opisan v Buchbergerjevi doktorski disertaciji [3]. Algoritem zahteva vnos množice polinomov $\{f_1, \dots, f_s\} \in k\,[x_1, \dots, x_n] \setminus \{0\}$ in vrne Gröbnerjevo bazo G ideala $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$.

*Algoritem 2 (**Buchberger**).* Procedura v psevdokodu je:

POSTAVI
$G := \{f_1, \dots, f_s\}$.
Korak 1. Za vsak par $g_i, g_j \in G,\ i \neq j$, izračunaj S_{g_i,g_j}
S pomočjo algoritma za multideljenje izračunaj $r_{i,j}$:

$$S_{g_i,g_j} \xrightarrow{G} r_{i,j}$$

ČE
Vsi $r_{i,j} = 0$, izpiši G
SICER
K množici G dodaj vse neničelne $r_{i,j}$ in se **vrni** na Korak 1.

Opomnimo, da imajo vsi najučinkovitejši sistemi računske algebre ukaze (»rutine«) za izračun Gröbnerjevih baz. V sistemu `Mathematica` je ukaz

`GroebnerBasis`. Ker Buchbergerjev algoritem temelji na algoritmu 1, ta pa temelji na monomski ureditvi členov, je izračun Gröbnerjeve baze odvisen od monomske ureditve. (Toda pri izbrani monomski ureditvi je Gröbnerjeva baza enolična.) Poleg `Mathematice` imajo takšne rutine med drugimi še `Singular` in `Maculay2`.

Opazimo, da lahko Buchbergerjev algoritem proizvede več baznih elementov, kot je potrebno, in s tega stalšča ni optimalen. To pa lahko izboljšamo, če zahtevamo dodatni pogoj, da noben člen polinoma g_i ni deljiv z $LT(g_j)$ za $j \neq i$. Enoličnost množice G končno zagotovimo, če zahtevamo še, da je vsak g_i *moničen* (tj. $LC(g_i) = 1$ za vsak i). Tako dobimo t. i. *reducirano* Gröbnerjevo bazo. Reducirana Gröbnerjeva baza vedno obstaja in je enolična (glej npr. [9, Theorem 1.2.24]). Preprost algoritem, ki proizvede reducirano Gröbnerjevo bazo in se začne s katerokoli Gröbnerjevo bazo, je naslednji: začnemo z G in naredimo vsak polinom $g_i \in G$ moničen, nato vsak $g \in G$ zamenjamo z njegovim ostankom pri deljenju g z elementi $G \backslash \{g\}$ (pri fiksni monomski ureditvi). Seveda ukazi v vseh sistemih računske algebre izračunajo Gröbnerjevo bazo, ki je že reducirana. Na primer: Gröbnerjeva baza ideala $I = \langle -x^3 + y, x^2y - y^2 \rangle$ glede na leksikografsko ureditev $x > y$ je $G = \{-y^2 + y^3, -y^2 + xy^2, x^2y - y^2, x^3 - y\}$.

V nadaljevanju bomo obravnavali problem iskanja Gröbnerjeve baze v zvezi z nelinearnimi sistemi enačb. Med številnimi uporabami Gröbnerjevih baz bomo na koncu omenili tudi uporabo pri celoštevilskem programiranju, kjer uporabimo Gröbnerjevo bazo z uteženo ureditvijo (glej [5]).

Recimo, da iščemo rešitev $(a_1, \ldots, a_n) \in \overline{k}^n$ (nelinearnega) polinomskega sistema (5), kjer je $\overline{k}$ algebraično zaprtje polja k. Naslednji izrek (glej [3, str. 170]) poda kriterij za obstoj rešitve sistema (5).

Izrek 4. *Naj bo $G = \{g_1, \ldots, g_t\}$ reducirana Gröbnerjeva baza ideala $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$. Sistem nima rešitve natanko tedaj, ko je $G = \{1\}$.*

Med glavnimi problemi v teoriji polinomskih kolobarjev je problem, ali je neki polinom f v danem idealu $I = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, in problem, ali je neki polinom v radikalu $\sqrt{I}$ [9, str. 30]. S tem problemom je povezanih več sorodnih problemov; od relacije (v smislu podmnožice) med dvema idealoma do enakosti idealov in preseka idealov [9, str. 36–37], ter nenazadnje problem tako imenovane primarne dekompozicije ideala [9, str. 40–42].

Če sistem (5) nima končno mnogo rešitev, je za njegovo razrešitev treba izračunati primarno dekompozicijo ideala I, kar je znatno zahtevnejše kot račun v spodnjem primeru (podrobnosti glej v [9, poglavje 1.4]), kjer je prikazan tudi postopek uporabe Buchbergerjevega algoritma.

Primer 7. Poiščimo rešitev sistema:

$$\begin{aligned} f_1 &= x^2 + y = 0, \\ f_2 &= 2x^2y + x^4 = 0, \\ f_3 &= xz + x^4 + xy + x^2y^2 = 0. \end{aligned}$$

Izračunajmo Gröbnerjevo bazo z uporabo Buchbergerjevega algoritma. Fiksiramo leksikografsko ureditev $z > y > x$ in uredimo zapis polinomov f_1, f_2, f_3 glede na to ureditev:

$$\begin{aligned} f_1 &= y + x^2, \\ f_2 &= 2yx^2 + x^4, \\ f_3 &= zx + y^2x^2 + yx + x^4. \end{aligned}$$

Sedaj izračunamo posamezne S-polinome, ki so

$$\begin{aligned} &S_{f_1,f_2} = \tfrac{yx^2}{y}(y + x^2) - \tfrac{yx^2}{2yx^2}(2yx^2 + x^4) = \tfrac{x^4}{2}, \\ &S_{f_1,f_3} = \tfrac{zyx}{y}(y + x^2) - \tfrac{zyx}{zx}(zx + y^2x^2 + yx + x^4) = zx^3 - y^3x^2 - y^2x - yx^4, \\ &S_{f_2,f_3} = \tfrac{zyx^2}{2yx^2}(2yx^2 + x^4) - \tfrac{zyx^2}{zx}(zx + y^2x^2 + yx + x^4) = \tfrac{zx^4}{2} - y^3x^3 - y^2x^2 - yx^5. \end{aligned}$$

Sedaj $S_{f_1,f_2} = \frac{1}{2}x^4$ delimo z urejeno množico polinomov (f_1, f_2, f_3) in dobimo ostanek $\frac{1}{2}x^4$. Ker je le-ta neničeln, ga pripišemo k začetni množici polinomov in dobimo urejeno množico $G = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, kjer je $f_4 = \frac{1}{2}x^4$. Če delimo polinoma S_{f_1,f_3} in S_{f_2,f_3} z množico polinomov G, obakrat dobimo ostanek 0. Tako je Gröbnerjeva baza ideala $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ enaka $G_B = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$. Bazo reduciramo tako, da vse vodilne koeficiente polinomov f_1, f_2, f_3 in f_4 postavimo na 1. Opazimo tudi, da če polinom f_2 delimo z množico (f_1, f_4), dobimo ostanek 0. Zato lahko f_2 odstranimo iz Gröbnerjeve baze. Če pa polinom f_3 delimo z množico (f_1, f_4), dobimo ostanek $zx - x^3$, ki ga v Gröbnerjevi bazi zapišemo namesto f_3. Tako je reducirana Gröbnerjeva baza ideala $\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ enaka

$$G_R = \{y + x^2, x^4, zx - x^3\}.$$

Sedaj lahko sistem $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ rešimo zelo preprosto. Ker je drugi polinom v G_R odvisen samo od spremenljivke x, je očitno $x = 0$. Prvi polinom v Gröbnerjevi bazi vsebuje samo x in y, od koder sledi $y = 0$. Zadnji polinom vsebuje spremenljivki x in z, $x = 0$ pa očitno reši enačbo $zx - x^3 = 0$ za vsak z, torej je z poljuben in sistem ima neskončno rešitev, ki jih zapišemo kot

$$\{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}.$$

Nazadnje omenimo, da lahko s pomočjo Gröbnerjevih baz rešujemo splošni problem celoštevilskega programiranja (IP) (glej [5]), ki se glasi takole:

$$\text{minimiziraj} \quad \vec{c}\cdot\vec{x} \quad \text{pri pogoju} \quad A\vec{x}=\vec{b}, \tag{10}$$

kjer je $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ in $\vec{b}=(b_1,\ldots,b_m)^T \in \mathbb{Z}^m$, in da je zelo obsežna tudi uporaba Gröbnerjevih baz pri kvalitativni obravnavi sistemov navadnih diferencialnih enačb (glej npr. [4, 8, 9]).

LITERATURA

[1] M. Beaudin, G. Picard in G. Savard, *Polynomial Systems Solving with Nspire CAS*, V: Galán García, José Luis (ur.). ACA 2013, Málaga, July 2nd–6th, 2013, Hotel Málaga Palacio, Málaga, Spain. Proceedings of Applications of Computer Algebra, 2013, str. 41.

[2] B. Buchberger, *Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restlassenringes nach einem nulldimensionalen Polynomideal,* PhD Thesis, Mathematical Institute, University of Innsbruck, Austria, 1965; *An Algorithm for finding the basis elements of the residue class ring of a zero dimensional polynomial ideal*, *J. Symbolic Comput.* **41** (2006), 475–511.

[3] D. Cox, J. Little in D. O'Shea, *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, 3rd edition, Springer, New York, 2007.

[4] V. F. Edneral, A. Mahdi, V. G. Romanovski in D. S. Shafer, *The center problem on a center manifold in* $\mathbb{R}^3$, Nonlinear Anal. **75** (2012), 2614–2622.

[5] S. Flory in E. Michel, *Integer Programming with Gröbner basis*, `http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/amj/People/Eberhard.Michel/Documents/Else/DiscreteOptimization.pdf`, ogled 29. 9. 2015.

[6] X. S. Gao in S. Chou, *Implicitization of rational parametric equations*, J. Symbolic Comput. **14** (1992), 459–470.

[7] G.-M. Greuel, G. Pfister in H. A. Schönemann, `SINGULAR 3.0` *A Computer Algebra System for Polynomial Computations*, Centre for Computer Algebra, University of Kaiserlautern (2005), `http://www.singular.uni-kl.de`, ogled 29. 9. 2015.

[8] V. Romanovski, M. Mencinger in B. Ferčec, *Investigation of center manifolds of three-dimensional systems using computer algebra*, Program. comput. softw. **39** (2013), 67–73.

[9] V. G. Romanovski in D. S. Shafer, *The Center and cyclicity Problems: A computational Algebra Approach*, Birkhäuser, Boston, 2009.

O GIBALNI KOLIČINI SVETLOBE V PROZORNEM SREDSTVU

JANEZ STRNAD

Fakulteta za matematiko in fiziko
Univerza v Ljubljani

PACS: 41.20.Jb

Kaže, da so se približali rešitvi več kot sto let stare dileme o gibalni količini svetlobe v prozorni snovi, znane kot nasprotje Minkowskega in Abrahama. V mednarodnem letu svetlobe se zdi vredno poročati o tem tudi zaradi novih merilnih načinov.

THE MOMENTUM OF LIGHT IN A TRANSPARENT MEDIUM

Apparently, the more as hundred years old dilemma of the momentum of light in a transparent medium, known as the Minkowski-Abraham controversy, is nearing its solution. In the International year of light it seems appropriate to report on this also with respect to new measuring methods.

Gibalna količina svetlobe

James Clerk Maxwell je že leta 1862 izpeljal zvezo:

$$G = W/c, \quad g = G/V = |\vec{E} \times \vec{H}|/c^2 \tag{1}$$

med gibalno količino G, ki jo ima svetloba z energijo W, če c zaznamuje hitrost svetlobe v praznem prostoru. Dodali smo še zvezo za gostoto gibalne količine. Zveza velja v praznem prostoru. Leta 1908 je Hermann Minkowski napovedal, da je gibalna količina svetlobe v prozornem dielektriku z lomnim količnikom n večja kot v praznem prostoru:

$$G_M = nW/c, \quad g_M = G_M/V = |\vec{D} \times \vec{B}|. \tag{2}$$

Dodali smo zvezo za gostoto gibalne količine. Leto pozneje je Max Abraham zatrdil, da je gibalna količina svetlobe v prozornem dielektriku manjša kot v praznem prostoru:

$$G_A = W/(nc), \quad g_A = G_A/V = |\vec{E} \times \vec{H}|/c^2. \tag{3}$$

Tudi v tem primeru smo dodali zvezo za gostoto gibalne količine. Pri tem vzamemo, da lomni količnik ni odvisen od valovne dolžine, se pravi, da ne upoštevamo razklona, in da je dielektrik nemagneten. V praznem prostoru z $n = 1$ enačbi (2) in (3) preideta v (1).

Enačbe za gostoto gibalne količine povežemo z enačbami za gibalno količino z zvezami za elektromagnetno valovanje: $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, $g_M = \varepsilon g_A = n^2 g_A$, $B^2 = \varepsilon\varepsilon_0\mu_0 E^2$, $B = E/(c/n)$ in $w = W/V = \varepsilon\varepsilon_0 E^2$. Omejili smo se na najpreprostejši primer, da je valovanje ravno in se razmere ne spreminjajo s krajem. V enačbah še nismo izvedli časovnega povprečenja, ki bi pripeljalo na primer do $\overline{w} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2$.

Gibalna količina elektromagnetnega valovanja je zanimiva količina [1]. O nasprotujočih si enačbah (2) in (3) so še posebej vneto razpravljali, tako da se je nabrala obsežna literatura [1].[1]

Do enačb (2) in (3) sta pripeljali zapleteni izpeljavi, v katerih sta Minkowski in Abraham uporabila različna tenzorja energije-gibalne količine elektromagnetnega polja. V kvantnem okviru je do enačb mogoče priti preprosto z zvezo med gibalno količino fotona in valovno dolžino svetlobe $G_1 = h/\lambda$. Planckova konstanta h energijo fotona povezuje s frekvenco $W_1 = h\nu$. Enačba (2) sledi, če upoštevamo, da je valovna dolžina v snovi z lomnim količnikom n enaka λ/n: $G_{1M} = nh\nu/(\lambda\nu) = nW_1/c$. Enačba (3) pa sledi, če z zvezo $m_1c^2 = h\nu$ vpeljemo efektivno maso fotona in z njo izračunamo gibalno količino: $G_{1A} = m_1 v = (h\nu/c^2)c/n = W_1/(cn)$ s hitrostjo svetlobe $v = c/n$ v snovi z lomnim količnikom n [2, 3].

Vprašanje je že na prvi pogled zapleteno. Elektromagnetno valovanje v snovi zaniha naelektrene delce, tako da gibalno količino sestavljata prispevek polja in prispevek delcev. Po enačbah (1) in (3) sklepamo, da prispevek polja zajame Abrahamova enačba. Enačba Minkowskega pa ne opiše polne gibalne količine v snovi, kakor bi morda pričakovali [4]. Polne gibalne količine ni mogoče preprosto vpeljati, ker ni preproste utemeljitve, kdaj snov miruje. To je mogoče za krajevno in časovno omejen sunek elektromagnetnega valovanja. Najprej vzamemo, da nemotena snov miruje, potem elektromagnetno polje v sunku zaniha atome in po prehodu sunka nemotena snov zopet miruje. Polno gibalno količino v posebnem primeru podaja zveza $G = \frac{1}{2}[(n^2+1) - \frac{1}{3}(n^2-1)^2]G_A$ [4]. Pokaže se, da enačba Minkowskega

[1] Spletni naslov *PDF Bibliography on the Abraham-Minkowski debate. Princeton ...* vsebuje 225 člankov, a zahteva prijavo. (Nemškim člankom so dodani angleški prevodi.) Posamezni članki pa so prosto dostopni, na primer *H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetische Vorgänge in bewegten Körpern* ali *M. Abraham, Zur Elektrodynamik bewegter Körper.*

podaja *psevdogibalno količino*, ki je v tem primeru precej koristna. Nekateri Abrahamovo gibalno količino imenujejo *kinetična gibalna količina*, medtem ko je za gibalno količino Minkowskega več imen: *kvazigibalna količina*, *kanonična* ali *kristalna gibalna količina* ali kar *valovni vektor*. Različna imena opozarjajo tudi na različne poglede. Razpravi o tem se izognemo [5].

Pogled na veljavo enačb (2) in (3) se je s časom spreminjal. Najprej je prevladovalo mnenje, da je prava enačba Minkowskega, za katero se je zdelo, da jo podpirajo merjenja. Potem se je mnenje začelo nagibati k Abrahamovi enačbi. Zdaj nekateri menijo, da sta pravi obe enačbi, le da veljata v različnih okoliščinah [2, 3].

Poskusi

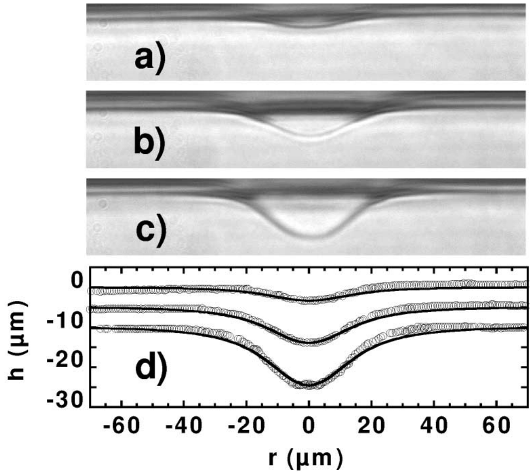
Da bi razumeli poskuse, si oglejmo, kako svetloba deluje na prozorno snov. Po izreku o gibalni količini je sunek sile enak spremembi gibalne količine. Na ravno mejo prozorne snovi naj iz praznega prostora pravokotno pade omejen curek svetlobe. Del energijskega toka $r^2 = (n-1)^2/(n+1)^2$ se odbije, del $1 - r^2$ vstopi v snov. Treba je upoštevati tudi odriv odbitega dela. Za razliko gibalnih količin za oba primera dobimo:

$$\Delta G_M = (1-r^2)nW/c - (1+r^2)W/c = [(n-1)/(n+1)]2W/c, \qquad (4M)$$

$$\Delta G_A = (1-r^2)W/(nc) - (1+r^2)W/c = -[(n-1)/(n+1)]2W/c. \quad (4A).$$

Sprememba gibalne količine v enoti časa da silo. Ko upoštevamo odriv, iz zapisanih enačb razberemo, da curek svetlobe na prozorno snov po Minkowskem deluje od snovi proti praznemu prostoru, in po Abrahamu enako izdatno v nasprotni smeri.

Iz tega sledi navodilo za preizkus enačb (2) ali (3). Posvetiti je treba na vodoravno mejo prozorne snovi. Če se na osvetljenem delu snov izboči navzgor, velja enačba (2), če se ugrezne navzdol, pa enačba (3). A. Askin in J. M. Dziedzic sta leta 1973 laserski curek usmerila na gladino vode [6]. Z laserjem pri valovni dolžini 530 nm sta v 60 ns trajajočih sunkih, ki so si sledili 20-krat na sekundo in dosegli največjo moč od 1 do 4 kW, osvetljevala del gladine s premerom 4,2 μm. Opazila sta, da se je prepuščeni curek zožil. To sta pojasnila z učinkom zbiralne leče zaradi izbočenosti gladine. Po tem naj bi veljala enačba Minkowskega. Na sklep so letele pripombe, da bi zaradi velike moči laserskih sunkov izbočenost lahko povzročile sile, ker se je na robu sunkov močno spremenilo elektromagnetno polje.

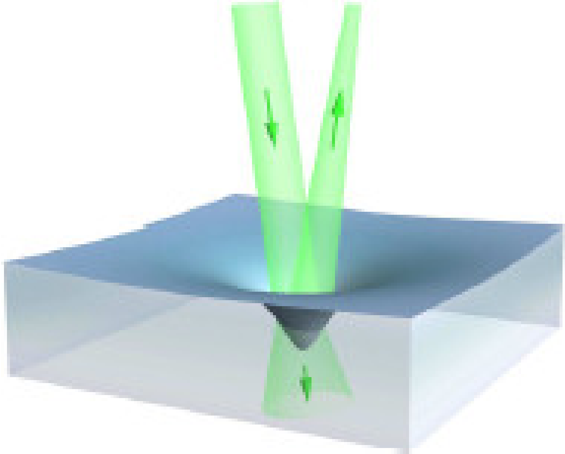


Slika 1. Gladina med plastema kapljevine je bila tem bolj izbočena, čim večja je bila moč laserja pri poskusu A. Casnerja in J.-P. Delvilla. Od zgoraj navzdol je bila moč laserja 0,27 W, 0,54 W in 0,81 W [7]. Uporabili so linearno polarizirani curek ionskega argonskega laserja z valovno dolžino 514 nm. Spremembo oblike gladine so uspešno napovedali z uporabljenimi enačbami.

Tudi druga merjenja so govorila za enačbo Minkowskega. Alexis Casner in Jean-Pierre Delville sta leta 2001 uporabila šibek neprekinjen curek argonskega ionskega laserja [7]. Opazovala sta mejo med plastema kapljevinskih mešanic z zelo majhno površinsko napetostjo, ki so ju sestavljali v glavnem voda, toluen in butanol. Meja je bila jasno izbočena v smeri curka in izbočenost je naraščala z močjo laserja (slika 1).

Od drugih poskusov samo omenimo enega s plinom in drugega s trdnino. Leta 2005 je ameriška raziskovalna skupina z odbojem fotonov na oblaku rubidijevih atomov v Bose-Einsteinovem kondenzatu dobila rezultat, ki je ustrezal enačbi Minkovskega [8]. Leta 2008 je kitajska raziskovalna skupina uporabila kremenovo vlakno s premerom 450 nm in pri izstopu svetlobe iz vlakna zaznala silo v notranjost vlakna, kar je ustrezalo Abrahamovi enačbi [9]. Rezultate poskusa z vlaknom so kritizirali z dveh strani, tako da jih kaže sprejeti z zadržkom.

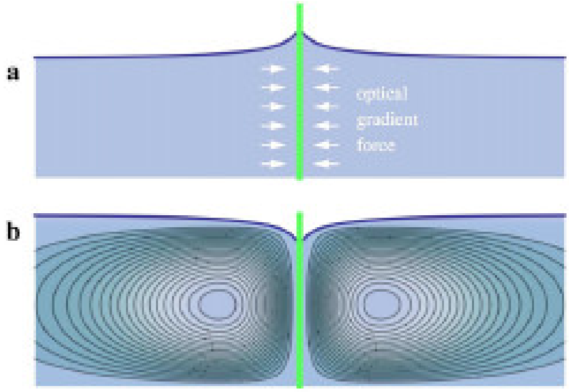
Skupina raziskovalcev z Državnega laboratorija za optoelektronske materiale in tehnologije v Guanzhouu na Kitajskem in z Inštituta za kompleksne sisteme na Weizmannovem inštitutu v Izraelu je pred kratkim poročala o svojih poskusih [3]. Gladino vode ali mineralnega olja so obsevali z vzpore-



Slika 2. Pri poskusu se del vpadnega laserskega curka odbije in zoži, del ga vstopi v kapljevino. Na gladini po Abrahamovi enačbi nastane vdolbina, ki deluje kot ukrivljeno zbiralno zrcalo, zaradi katerega se zoži odbiti curek. Kot med vpadnim in odbitim curkom je pretiran, v resnici je meril le 3° [3].

dnim neprekinjenim laserskim curkom in opazovali odbiti curek. Ugotovili so, da se je odbiti curek zožal. To so pojasnili z vdolbino, ki je nastala po Abrahamovi enačbi in je delovala kot zbiralno zrcalo (slika 2). Zasledovali so, kako se je vzpostavilo ravnovesje med silo zaradi svetlobe in površinsko napetostjo. Laserski curek z valovno dolžino 532 nm je imel Gaussov profil s polmerom 0,165 mm pri olju in 0,175 mm pri vodi. Moč je segla od 0,4 do 1 W pri olju in od 1,2 do 2 W pri vodi. Izmerili so površinsko napetost, lomni količnik in absorpcijski koeficient in izvedli več kontrolnih poskusov. Curek se je po vključitvi zožil v 0,7 s pri olju in 1,0 s pri vodi. Pri moči laserja 1 W je bil krivinski polmer ugreznjenega dela 2,76 m pri olju, pri moči 2,1 W pa 2,98 m pri vodi. Gladina se je ugreznila za 20 nm.

Pojasnili so, zakaj so nekatere meritve podprle enačbo Minkovskega in druge Abrahamovo enačbo. Gladina se izboči, kar ustreza enačbi Minkowskega, če svetloba sicer povzroči spremembo tlaka v kapljevini, a ne požene kapljevine v gibanje, ko je svetlobni curek preozek ali posoda preplitva. Če pa svetloba požene kapljevino v kroženje, se gladina na mestu curka ugrezne, kar ustreza Abrahamovi enačbi. Poskus in razlago so še dodatno podprli. Skupina se že dalj časa ukvarja z zadevo in po tej strani zbuja zaupanje. Vendar se o vprašanju mnenja precej razhajajo, zato ni pričakovati, da bodo razprave ponehale.



Slika 3. Tako pojasnijo, zakaj nekatera merjenja podpirajo enačbo Minkovskega in druga Abrahamovo enačbo. Če je curek zelo ozek in posodica plitva, svetloba povzroči, da se gladina dvigne po enačbi Minkovskega. Če svetloba požene kapljevino v krožni tok, se gladina ugrezne po Abrahamovi enačbi [3].

LITERATURA

[1] D. J. Griffiths, *Resource letter EM-1: electromagnetic momentum*, Am. J. Phys. **80** (2012), 7–18.

[2] U. Leonhardt, *Momemtum in an uncertain light*, Nature **444** (2006), 823–824.

[3] L. Zhang, W. She, N. Peng in U. Leonhardt, *Experimental evidence for Abraham pressure of Light*, New Journal of Physics **17** (2015), 53035, 1–12.

[4] R. Peierls, *More Surprizes in Theoretical Physics*, Princeton Univesity Press, Princeton 1991, str. 38, 41.

[5] A. B. Pippard, *Momentum and pseudo-momentum: 1. Classical pseudo-momentum and wave pressure*, Eur. J. Phys. **13** (1992), 2–87.

[6] A. Askin, M. Dziedzic, *Radiation pressure on a free liquid surface*, Phys. Rev. Lett. **30** (1973), 139–142.

[7] A. Casner, J-P. Delville, *Giant deformation of a liquid-liquid interface induced by the optical radiation pressure*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001), 054503-1-4.

[8] G. K. Campbell, A. E. Leanhardt, J. Mun, M. Boyd, E. W. Street, W. Ketterle in D. E. Pritchard, *Photon recoil momentum in dispersive media*, Phys. Rev. Lett. **94** (2005), 170403-1-4.

[9] W. She, J. Yu in R. Feng, *Observation of a push force on the end of a nanometer silica filement exerted by outgoing light*, Phys. Rev. Lett. **101** (2008), 243601-1-4.

MATEMATIK JOŽEF JENKO[1]

STANISLAV JUŽNIČ

Math. Subj. Class. (2010): 01A50

Kranjčan Jožef Jenko je bil eden najpomembnejših matematikov v habsburški monarhiji predmarčne dobe; predaval je v Ljubljani, Linzu, Gradcu in na dunajski univerzi. Vzgojil je celo vrsto vrhunskih strokovnjakov, vključno z ljubljanskim profesorjem matematike in astronomije Poljakom Schulzem. Posebna zasluga gre Jenku za tri desetletja iskrenega prijateljstva z Jernejem Kopitarjem.

MATHEMATICIAN FROM KRANJ JOSEF JENKO, (ON 200$^{\mathrm{TH}}$ ANNIVERSARY OF HIS CHAR IN LYCEUM AND JOANNEUM OF GRAZ)

Josef Jenko was one of the most important mathematicians of Habsburg Monarchy in Vormärz. He lectured in Ljubljana, Linz, Graz, and in Viennese University. He formatted a whole bunch of leading experts including the Polish professor Schulz who distinguished himself as professor of mathematics and astronomy in Ljubljana. Jenko is specially credited for his lifelong friendship with Jernej (Bartholomew) Kopitar.

Uvod

Jožef Jenko (*1776 Kranj, †1858 Dunaj) se je v svojih spisih in predavanjih ob matematiki ukvarjal tudi s hitro se razvijajočimi tehniškimi dosežki svoje dobe. Kot eden najpomembnejših matematikov v habsburški monarhiji je predaval visokošolsko matematiko v Ljubljani, Linzu, Gradcu in predvsem na dunajski univerzi. Vzgojil je celo vrsto vrhunskih matematikov in drugih strokovnjakov.

Študent

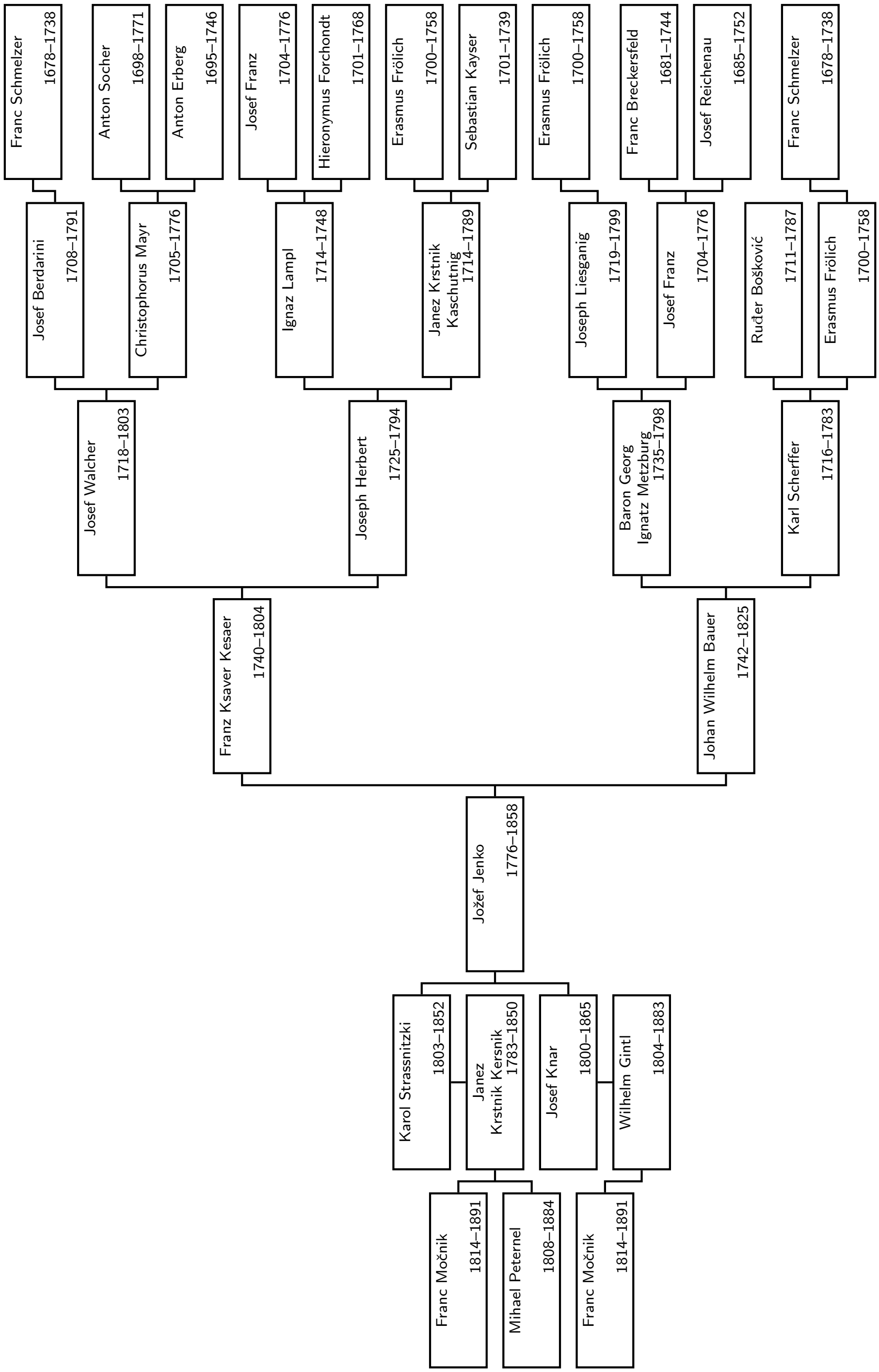
Po nižjih študijih je Jenko leta 1795/96 in 1796/97 obiskoval še ljubljanski licej, kjer ga je med filozofskimi študijami fiziko učil Jernej Schaller, matematiko pa Anton Gruber. Jožef Jenko drugače od brata Tomaža v Ljubljani ni prejemal štipendije, čeprav je zaključne izpite iz fizike in uporabne matematike (11.–16. 3. 1796 in 18.–20. 8. 1796) pri Gruberju in Schallerju opravil z najboljšima ocenama [1].

[1] Ob dvestoletnici njegovega prevzema katedre na Liceju in Joanneumu v Gradcu. Sliki 1 in 2 sta dostopni tudi na spletni strani Obzornika `www.obzornik.si/62/4/juznic-sliki.html`.

Jenko je študiral filozofijo na Dunaju v letih 1797–1801. Najprej je obiskoval tretji, zadnji dunajski letnik liceja, saj diploma ljubljanskega liceja ni zadostovala za vpis na univerzo. Ob začetku univerzitetnega študija je Jenko postal Knafljev štipendist leta 1799, skupaj z dobra štiri leta mlajšim Antonom Gogalo pl. Leesthalom (*1780, †1841), ki je bil 11. 9. 1814 skupaj s profesorjem cerkvenega prava in zgodovine cerkve v Ljubljani Jurijem Dolinarjem krstni boter Jenkovega prijatelja, ljubljanskega profesorja matematike Samuela Gunza [2].

Jenkov dunajski profesor fizike in mehanike v drugem letniku je bil nekdanji ljubljanski fizik in rektor Anton Ambschell, matematiko pa je Jenko sprva poslušal v prvem in drugem letniku pri Georgu Ignatzu baronu Metzburgu, ki pa je umrl že 3. 5. 1798 [3]. Ambschell je leta 1798 predaval fiziko s poskusi po svojem učbeniku v drugem letniku filozofije, Döttler pa prav tam enako po učbeniku Johanna Christiana Polykarpa Erxlebena (*1744, †1777). Metzburga sta na katedri za matematiko nadomestila na nižji stopnji Bauer, na višji pa Kesaer. Uporabno matematiko je na Dunaju leta 1801 predaval profesor Bauer; leta 1798 je predaval praktično geometrijo v tretjem letniku filozofskih študijev. Johann Wilhelm Bauer (*1742/43, †1825) je učil raziskovalca praštevil Antona Felkela (*1740, †1800); bil je eden od najvidnejših profesorjev filozofske fakultete, dekan leta 1790/1791, senior leta 1807, cesarsko-kraljevi svetovalec (1814) in dobitnik zlate medalje z verižico leta 1817.

Tehnologijo je leta 1798 predaval Josef Mayer v tretjem letniku filozofskih študijev. Nauk o Zemlji je skupaj s pregledom tedanjih tehnologij na dunajski univerzi predaval doktor filozofije in lekarništva Vincent von Vlaha, opazovalno astronomijo pa Franz von Paula Triesnecker (*1745, †1817) ob teoretski astronomiji, ki je bila tedaj v domeni profesorjev matematike in fizike. Ambschellov pomočnik je bil izredni profesor eksperimentalne fizike Döttler, čigar učbenik iz leta 1812 je Jenko pozneje ocenil na petih straneh; Jenko in Bolzano sta ocenila tudi učbenik Abrahama Gotthelfa Kästnerja, po katerem je ljubljanske veljake svoj čas poučeval Gabrijel Gruber. Na dunajski univerzi je višjo matematiko predaval prostozidarski podpornik Jurija Vege Franz Ksaver pl. Kesaer (*1740, †1804), ki je v Bornovem prostozidarsko-naravoslovnem glasilu objavil razpravi o centralnih silah in o Evklidovem petem postulatu »Abhandlung über die Lehre von den Parallellinien«.



Slika 1. Akademski predniki in potomci Jožefa Jenka po vejah njegovih dunajskih profesorjev Kesaerja in Bauerja.

Profesor matematike v Ljubljani, Linzu, Gradcu in na Dunaju

Zaradi vojne je bila ljubljanska katedra za matematiko leta 1802/1803 nezasedena, tako da je matematična predavanja 6. 6. 1803 nadomeščal profesor fizike Schaller, 28. 8. 1803 pa Kalister. Naslednje leto 1803/04 je pouk matematike prevzel Kranjčan Jožef Jenko; leta 1808 je bil profesor čiste in uporabne matematike [4]. Tako je Jenko vsaj nekaj časa obenem s Kalistrom poučeval matematiko na liceju, potem ko je Kalister leta 1807 znova postal profesor za matematiko, fiziko in naravoslovje na ljubljanskem liceju.

Desetega avgusta 1803 pa je bil Jenko imenovan za profesorja matematike. Dne 6. 4. 1802 se je Schaller podpisal kot profesor fizike in suplent za uporabno matematiko, 27. 8. 1803 pa sta bila pod redovalnico podpisana Franc Wilde in Matija Kalister kot učitelj 4. razreda normalke in suplent matematike. 29. 3. 1804 je bil kot učitelj matematike že podpisan Josef Jenko, na isti dan, 6. 4. 1804 in znova oktobra 1804 pa Johann Neumann kot učitelj fizike ter predavatelj grške literature in slovnice [5]. Uporabna matematika je tisti čas še obsegala številna področja sedanje astronomije in fizike vključno z geometrijsko optiko in deli mehanike.

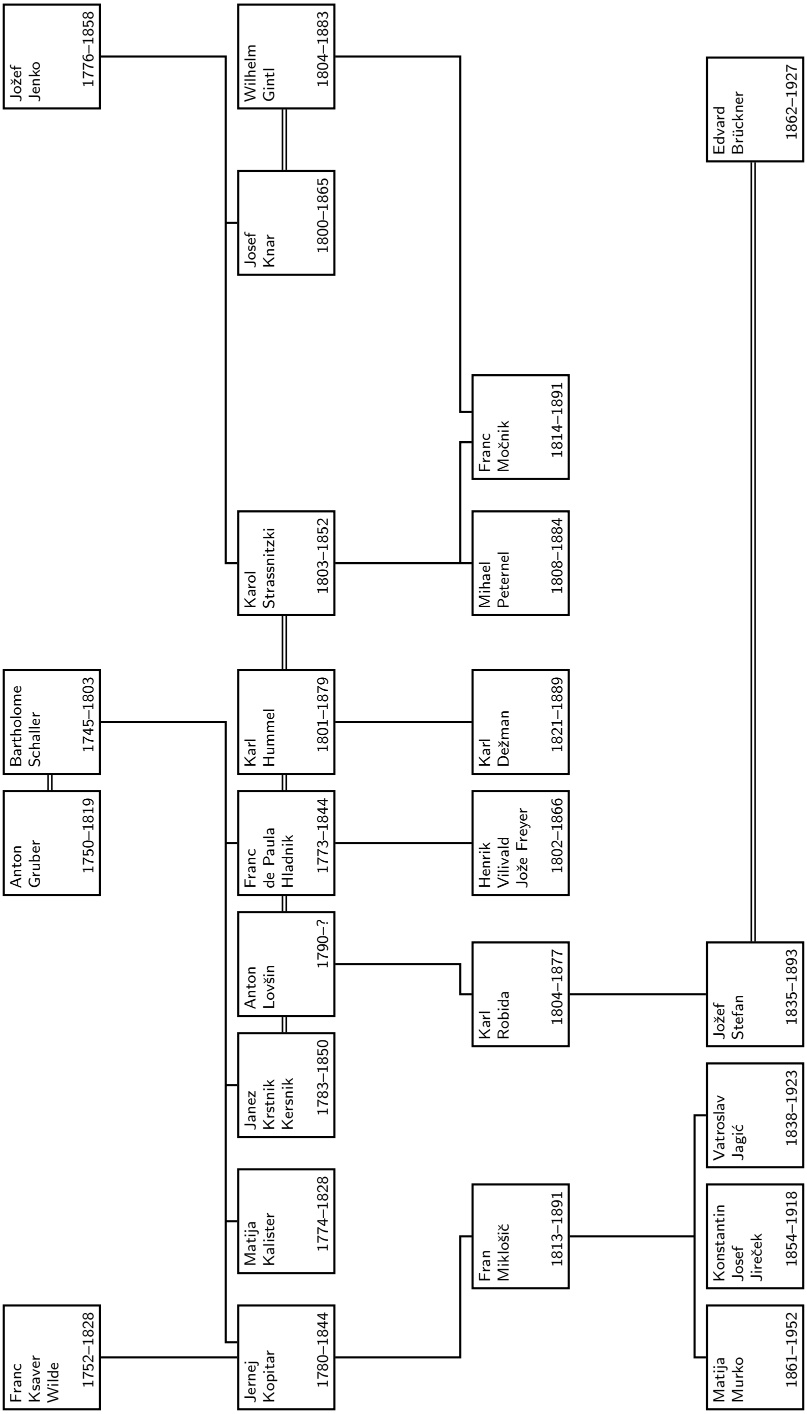
Nove francoske šolske oblasti so ljubljansko katedro za matematiko po Jenkovi ostavki in kratkem Kersnikovem nadomeščanju zaupale Jenkovemu prijatelju Samuelu Gunzu [6]. Gunz je bil ljubljanski profesor osnovne (elementarne) in uporabne matematike med jesenjo 1810 in letom 1819, občasno pa so za pouk osnov zaposlili pomočnika, leta 1814 pa je kot profesor suplent predaval tudi grščino. Leta 1819 je Gunz odšel v Linz in tam prevzel nekoč Jenkovo katedro za višjo matematiko.

Jenko se je v Ljubljani zaljubil v Jožefo (Pepico) Kogl (Kogel, *1796, †1814), hčerko ljubljanskega zdravnika Karola Bernarda Kogla. Kljub Jenkovi prizadevnosti si je Pepca raje izbrala njegovega študenta Jožefa Rudeža (*1793, †1846). Jožef je leta 1807/08 obiskoval šesti razred nižjih šol v Ljubljani, nato je v Ljubljani na liceju pri Jenku končal drugi letnik filozofskih študijev, tik preden je Jenko podal ostavko dne 14. 6. 1810 v korist Kersnika in Gunza. V Ljubljani je Jenko učil le prvi semester leta 1809/10, nato pa je predaval v Linzu [7].

Gorenjski rojak Jernej Kopitar (*1780, †1844) je v pismih večkrat prosil Žigo Zoisa, naj Jenku s priporočili pomaga do boljše službe, s katero bo lahko preživljal svojo družino [8]. Jenko je z Zoisovim posredovanjem po umrlem Mathiasu Jeschowskem dne 29. 4. 1814 prevzel graška licejska predavanja matematike; pol leta pozneje 24. 11. 1814 je Jenko prevzel še predavanja tehnologije na Joanneumu, poznejši graški politehniki. S tem so bile njegove gmotne skrbi dodobra odpravljene. Jenko je zasedal graško licejsko katedro za matematiko v letih 1814–1819, od 25. 10. 1816 z ramo ob rami s profesorjem fizike Kulikom. Leta 1815/16 je Jenko na graškem liceju predaval matematiko in tehnologijo, Neumann pa fiziko. Leta 1819 je Kulik (Kullik) predaval fiziko in astronomijo namesto Neumanna na graškem liceju in na Joanneumu. Jenko je bil profesor tehnologije, ki ji je leta 1819 dodal še matematiko.

Jenkov nekdanji študent Štajerec Josef Knar (*1800, †1864) je prevzel Jenkov pouk matematike na liceju v Gradcu leta 1820, leta 1824 pa je postal redni (stalni) profesor matematike in tehnologije. Istega leta je v Gradcu objavil knjigo o novem postopku za računanje korenov števil in poslal dve pismi Jenku.

Do februarja 1819 je zunanji avstrijski član koroške kmetijske družbe Ignac Appeltauer (*1769, †1829) poučeval osnove matematike na univerzi na Dunaju. Dne 13. 12. 1819 ga je nadomestil Jenko, ki je bil vpisan kot profesor elementarne matematike, stanujoč v Leopoldstadt št. 590, šele v šolskem letu 1820/21. Med izredno dolgim profesorskim stažem je Jenko do upokojitve leta 1850 predaval dunajskim slušateljem prvega letnika filozofije kot izredni profesor elementarne matematike; obenem je bil odbornik splošne vzajemne kapitalske in rentno-pokojninske zavarovalnice. Poučeval je sedem do osem ur na teden po obeh delih Appeltauerjevega učbenika iz let 1814 in 1817; v drugem letniku je učil suplent Rudolf Brestel, poznejši finančni minister tako imenovane meščanske vlade. Med Jenkovimi sodelavci na dunajski univerzi so bili njegovi nekdanji učitelji Bauer, profesor fizike in mehanike Johann Zemantsek, astronom Johann Bürg, direktor zvezdarne in profesor znanstvene astronomije Josef Littrow, adjunkt za fiziko in mehaniko Andreas Spunar; katedra za višjo matematiko ni bila zasedena od leta 1821, vse do Petzvalovega imenovanja 19. 11. 1836; matematik Petzval je zaslovel tudi z raziskovanjem optike leč. Leta 1850 je Jenkova dunajska izredna predavanja prevzel Bolzanov študent dr. Franz Ksaver Moth (*1802, †1879) kot redni profesor [9].



Slika 2. Akademski predniki Jerneja Kopitarja v povezavi z njegovim prijateljem Jenkom.

Jenkovi rokopisi, učbeniki, študentje in sodelavci

Jenkova zapuščina je danes posebna enota v Pragi, le korespondenco z Bernardom Bolzanom (*1781, †1848) so leta 1971 prenesli med Bolzanove spise. Bolzano spada med vidne češke matematike, pomembne za razvoj analize. Nekateri deli Jenkove zapuščine so še posebej imenitni, denimo štirinajst listov največjega folioformata dolg popis Jenkove knjižnice. Med zanimivimi spisi je še prošnja za dovoljenje za tisk Jenkovih matematičnih tez za izpit na višjih filozofskih študijih Liceja v Ljubljani. Zapisana je bila na dveh listih leta 1807.

Jenko je sestavil zajeten rokopis o sestavi Zemljine skorje na petinšestdesetih listih, rokopis o letalstvu pa na desetih listih folioformata. Napisal je oceno knjige praškega nato dunajskega rektorja Franza Ignatza Cassiana Hallaschka (Halaška, *1780, †1847), moravskega naravoslovca, matematika, fizika in astronoma. Podobno je recenziral učbenik svojega poznejšega sodelavca Andreasa Baumgartnerja o uporabi mehanike za umetnost in obrt. Baumgartner je z Jenkovim priporočilom postal univerzitetni profesor; nato se je povzpel na položaj direktorja tobačnih in drugih tovarn, predsednika akademije in končno še ministra.

Jenko je po kratkem fizikalno-matematičnem rokopisu na enem listu folioformata ocenil še učbenik svojega nekdanjega profesorja piarista Remigia Döttlerja na petih folijih; recenziral je dva učbenika svojega nekdanjega študenta Schulza o čisti geometriji na enem foliju in prvi del elementov čiste matematike na osmih folijih. Sestavil je izvlečke iz kemijskih spisov na treh folijih in recenzije na 12 folijih. Presodil je tedanje fizikalne vsebine (2 folija), na petih listih pisal o zavarovalništvu, na sedmih o kronometriji, na petih o cenah, prav tako na petih pa je odgovoril na nagradno vprašanje o mostovih. Na enem foliju je opisal napravo za preprečevanje pršenja isker iz dimnih vodov parnih strojev po seznamu. Na enem listu je opisal merilno napravo, na dveh pa zgradbo teatra dne 8. junija 1817. Opisal je železnice za natečaj ministrstva za obrt in trgovino na devetnajstih listih, na nagradno vprašanje danske znanstvene družbe pa je odgovoril na štirih listih. Kmalu po prihodu je Jenko v Gradcu sestavil šest folijev rokopisa za svoj govor obrtnikom dne 19. 11. 1815. Na 160 in še 56 listih je ocenil delo kandidatov za končne izpite za matematiko in fiziko na različnih univerzah v Avstriji. Šestindevetdeset pisnih matematičnih nalog njegovih študentov dunajske filozofske fakultete med letoma 1820–1845 je obsegalo 148 listov.

Med Jenkovimi najboljšimi študenti je bil Poljak Karol (Leopold) Schulz pl. Strassnitzki (Straszinski, Strasznicki, *1803, †1852). 22. 3. 1823 je Jenko priredil letno diskusijo (disputacijo), na kateri je Schulz branil več matematičnih tez. Schulz je postal adjunkt pri profesorjih Baumgartnerju, Jenku in Ettingshausenu dne 13. 9. 1824; čez tri leta je odšel v Ljubljano kot adjunkt in suplent, nato pa je bil Močnikov profesor. Vodilni slovenski pisec matematičnih učbenikov Močnik je bil potemtakem torej učenec Jenkovega učenca Schulza! Schulz je odkril formulo $\pi/4 = \arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8)$, skupaj s svojim pomočnikom, »živim računalnikom« Zachariasom Dasejem (Dahse), pa je zaslovel z izboljšavo preračunavanj decimalk števila π Jurija Vege in Williama Rutherforda. Dase je namreč po Schulzevi enačbi v nekaj tednih izračunal 200 pravilnih decimalk števila π. Dase je bil eden največjih genijev za računanje, matematične teorije pa so mu bile španska vas, zato brez Schulzeve osebne podpore ne bi prišel daleč. Ettingshausen je matematikom znan predvsem po uvedbi binomskega simbola, ki ga uporabljamo še dandanes.

Jenku so pisali profesorji matematičnih ved Leopold Gunz, Karel Hummel v letih 1839–1840, Josef Knar 1824, Biwaldov naslednik fizik v Gradcu Kulik 1816–1856 in dunajski astronom Joseph Johann Littrow (*1781, †1840) 1827 [10].

Jenko je pisal o Andreasu Baumgartnerju za upravo filozofske fakultete na Dunaju leta 1822, tako da je Baumgartner lahko postal naslednje leto profesor fizike in uporabe matematičnih spretnosti na Dunaju. O svojem dijaku Leopoldu Schulzu je Jenko pisal Dvorni študijski komisiji na Dunaju leta 1828, ko je bil Schulz še profesor v Ljubljani.

Jenko je leta 1833 stanoval na Leopoldstadt št. 590 severovzhodno od strogega središča Dunaja kot profesor čiste in elementarne matematike. Leta 1847 in 1848 je Jenko stanoval na Landstraße št. 358 jugovzhodno od strogega središča mesta [11]. Jenko je shranil 189 pisem Biwaldovega in Neumannovega naslednika na položaju graškega profesorja fizike Kulika. Kulik je bil na tej katedri obenem Hummelov predhodnik. Jakob Philip Kulik (*1793, †1863) in Jenko sta bila tri leta sodelavca v Gradcu. Dve pismi je Jenku pisal ljubljanski pomočnik in nato naslednik Jenkovega študenta Schulza Karl Hummel. Hummel je spisal prvi in edini ljubljanski licejski učbenik matematike; edini pač zato, ker so liceje kmalu po Hummelovem odhodu iz Ljubljane – ukinili.

Sklep

Jenkov pomen za Slovence je vsaj dvojen: bil je prvovrsten matematik, obenem pa najboljši in zadnji prijatelj Jerneja Kopitarja. Tako je Jenko za

Slovence zaslužen po dveh plateh, po matematično-tehniški in po slavistični. S Kopitarjem morda nista veliko znanstveno sodelovala, zato pa je Kopitar s pomočjo barona Žige Zoisa omogočil Jenku prevzem pomembnih avstrijskih matematičnih kateder.

Jenkov vpliv seveda seže daleč za slovenske meje. Do upokojitve leta 1850 je bil dolgoletni sodelavec pionirjev moderne znanosti v srednji Evropi, dunajskih profesorjev Ettingshausena, Baumgartnerja, Littrowa, J. Petzvala, Antona Schrötterja in Augusta Kunzeka. Ettingshausen in Baumgartner sta na Dunaju prva urejevala matematično-fizikalno revijo Zeitschrift für Physik und Mathematik, v kateri sta objavljala tudi ljubljanska profesorja matematike Schulz in Karl Hummel. Jenko je umrl ravno ob začetku poti Jožefa (Josipa) Stefana na vrh dunajske univerze.

LITERATURA

[1] ZAL SI LJU 184, Klasična gimnazija v Ljubljani, Akcijski fond 1, **75**, mapa 451.

[2] M. Preinfalk, Anton Gogala pl. Leesthal, *Drevesa*, 2012, 1, str. 8.

[3] A. Phillebois, *Wiener Universitäts-Schematismus für das Jahr 1798*, str. 46, 53, 188.

[4] *Hof- und Staats-Schematismus des Österreichischen Kaiserthums*, 2. del (Staat), Wien 1808, str. 716; ZAL SI LJU 186, 1/75 mapa 453.

[5] F. Kidrič, Gunz, Leopold (geslo), *Slovenski biografski leksikon*, 2. zvezek (ur. Izidor Cankar in drugi), Ljubljana.

[6] ZAL SI LJU 184, fond 1, enota 53; J. Ciperle, *Podoba velikega učilišča ljubljanskega*, Licej v Ljubljani 1800–1848, Ljubljana 2001, 251–253; V. Schmidt, *Zgodovina šolstva in pedagogike na Slovenskem*, II. Ljubljana 1964, str. 105; F. Kidrič, *Dobrovský in slovenski preporod njegove dobe*, Ljubljana 1930.

[7] L. Schiviz von Schivizhoffen, *Der Adel in der Matrikel des Hertzogtums Krain*, Görz, 1905, str. 311; L. Vidmar, *Zoisova literarna republika: Vloga pisma v narodnih preporodih Slovencev in Slovanov*, Ljubljana 2010, Kopitarjevo pismo 10. 10. 1812.

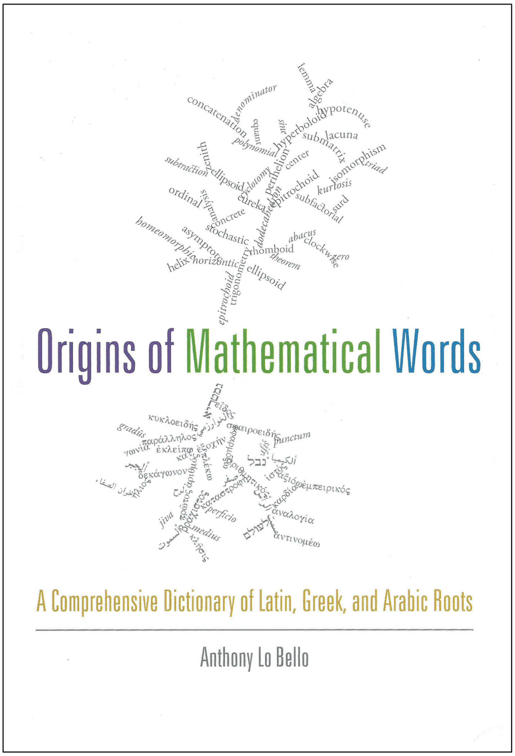
[8] *Hof- und Staats-Schematismus des Österreichischen Kaiserthums*, Wien 1816: str. 683, 742, 746, 816; 1819: str. 161, 165; 1820: str. 161, 167; 1821: str. 101; 1822: str. 110, 287; 1824, str. 168; F. Krones, *Die Geschichte der Karl Franzens Universität in Graz* 1585–1885, Graz 1886, str. 134, 137, 138, 290, 582, 585–586; J. Aschbach, *Geschichte der Wiener Universität von 1848–1898*, (ur. Akademischer Senat der Wiener Universität), Wien 1898, 276–277, 281.

[9] P. Křivský, *Josef Jenko (27. 3. 1776 Kranj–1858 Dunaj): písemná pozůstalost*, Praha 1978, 3–6, 9, 16; L. K. Schulz Strassnitzki, *Professor Schulz von Strassnitzki als Gelehrter und Mensch*, Eine Erinnerung an dessen zehnten Sterbtag (9. Juni 1862), Wien 1862, str. 9; *Schematismus des Laibacher Gouvernements im Königreiche Illyrien für das Jahr 1834*, str. 155; S. Južnič, *Cauchyjeva in Močnikova Gorica kot središče evropske matematike*, Arhivi, 2005, 28/1: 24; S. Južnič, *Začetki kristalografije v Ljubljani*, Acta Chimica Slovenica, 2006, 53/3: (Supplement) 4–6.

[10] *Hof- und Staats-Schematismus des Österreichischen Kaiserthums*, Wien 1824, str. 173; 1833, 2: str. 91, 338; 1836: str. 93, 358; 1847: 87, 112, 356, 358; 1848: str. 95a in 95b.

NOVE KNJIGE

Anthony Lo Bello, Origins of Mathematical Words, John Hopkins University Press, Baltimore, 2013, 366 strani.



V matematiki, fiziki in astronomiji zelo pogosto uporabljamo besede, ki imajo izvor v stari grščini, latinščini, pa tudi v arabščini. To se dogaja znanosti v vseh evropskih jezikih. Nekatere znanstvene izraze so sicer uspeli bolj ali manj uspešno prevesti v nacionalne jezike, vseh pa seveda še zdaleč ne. Razvoj matematike in drugih ved pa kar naprej zahteva, da si izmišljujemo nove in nove, kar nam bolj ali manj uspeva.

Anthony Lo Bello je napisal obsežno delo, etimološki slovar, ki natančno opisuje veliko število matematičnih in astronomskih izrazov. Pa ne samo to, pri nekaterih se zadrži veliko dlje, saj širše pojasnjuje njihovo zgodovinsko ozadje. Grške besede zapiše z grškimi črkami, arabske pa z arabskimi. To je pomembno, kajti prečrkovanje iz grške in arabske pisave v latinico ni vedno zadovoljivo, še posebej ne s črkami slovenske abecede. Poudariti je treba, da avtor pojasnjuje angleške besede grškega, latinskega in arabskega izvora, od katerih pa smo jih Slovenci vendarle uspeli precej prevesti v svoj jezik. Kljub temu uporabljamo veliko besed, ki so neprevedene, tako da je slovar še vedno zanimiv tudi za nas. Imamo sicer več izvrstnih splošnih slovarjev tujk, v katerih je na kratko pojasnjenih veliko besed s področja matematike, fizike in astronomije. Lo Bello pa se omeji v glavnem na matematiko in malo manj pozornosti posveti astronomiji.

Pri matematičnih izrazih je avtor zelo kritičen glede na to, kako so sestavljeni. Niso mu všeč tisti, ki so oblikovani iz grškega in latinskega dela, še manj pa je zadovoljen s kraticami z nekaj črkami in z besedami, ki so na pol grške oziroma latinske, na pol pa angleške.

V predgovoru Lo Bello navede nekaj zgodovine. Poudari, da nam stari

Egipčani in Babilonci niso zapustili matematičnih izrazov. Šele stari Grki, ki so sprejeli veliko matematičnega znanja iz Egipta in Mezopotamije, razvili pa so ogromno svojega, so dejansko ustvarili pravo matematično in drugo znanstveno izrazoslovje, ki ga bolj ali manj uporabljamo še danes. Tudi besedi **matematika** in **geometrija** sta grški. Večinoma je njihovo izrazje prešlo v latinščino skoraj nespremenjeno, samo prečrkovano v latinico: ϰ so prepisali v *c*, χ v *ch*, ξ v *x*, ζ v *z*, ϑ v *th*, υ v *y*, φ v *ph*, ψ v *ps*, ε, η v *e*, ω v *o*, οι v *oe*, αι v *ae*, ει v *i*. Znak za krepki pridih ῾ so zamenjali s *h*, končnico -ος z *-us*, -ιον z *-ium*. Tako so na primer oba Hipokrata, matematika in zdravnika, v grščini Ἱπποκράτης, prevedli v *Hippocrates*, očeta zgodovine, Herodota, v grščini Ἡρόδοτος, v *Herodotus*, Ptolemaja, grško Πτολεμαῖος pa v *Ptolemaeus*. Rimljani niso razvijali nove matematike. Kar so je poznali, so jo s precejšnjim delom izrazja vred prevzeli od Grkov. Po propadu zahodnega dela rimskega imperija je omembe vreden Boetij (480–524, letnici sta približni), rimski politik, filozof, teolog, matematik in fizik. Med drugim je prevajal Evklida iz grščine v latinščino. Po Boetijevi zaslugi imamo še danes besede grškega izvora **baza, diameter, gnomon, ortogonalen, paralelen, paralelogram, romb, romboid, trapez**. Prav tako besede latinskega izvora, na primer: **ekstrem, figura, komponenta, linearen, planaren, sektor**.

Vzhodni del nekoč mogočnega rimskega imperija je še ohranil veliko grškega matematičnega znanja in virov. Ko so Arabci zagospodovali severni Afriki, so spoznali vrednost Evklidovih Elementov in Ptolemajevega Almagesta in obe deli v 9. stoletju prevedli v arabščino. Iz tistega obdobja izvirajo besede **algebra, algoritem, azimut, zenit, cifra**, ki imajo arabske korenine. Adelard iz Batha je v 12. stoletju začel prevajati arabska znanstvena dela v latinščino, tudi Evklida. Iz njegovih prevodov smo dobili besede latinskega izvora, na primer: **aplikacija, ekvidistanten**.

V obdobju evropske renesanse je poraslo zanimanje za grško znanost in umetnost. Grška dela so prevajali neposredno iz grščine v latinščino, ki je ostala jezik znanosti vse do 19. stoletja. Pojavili so se latinski izrazi, iz katerih izvirajo na primer **abscisa, adicija, koeficient, diferencirati, eksponent, formula, funkcija, maksimum, minimum, multiplikacija, ordinata**. Zanje se je treba zahvaliti velikim matematikom, kot so Newton, Leibniz, Bernoulliji in Euler, ki so obvladali latinščino in grščino in pravilno sestavljali nove matematične izraze. Z vedno slabšim znanjem klasičnih jezikov so se pojavile besede, ki jih Lo Bello ne šteje med zgledno sestavljene in jim dodaja prilastek *macaronic*. Take besede so nastale iz latinskega, grškega ali kakšnega drugega dela, na primer: **avtokorelacija, kohomologija, difeomorfizem, hiperprostor, matroid, kvazianalitičen**.

Oglejmo si nekaj primerov temeljitih razlag besed. **Brahistohrona** je krivulja, po kateri pade v homogenem gravitacijskem polju v najkrajšem času točkasta masa iz ene točke v drugo pod njo, pri čemer točki nista na isti vertikali. Problem brahistohrone je postavil Johann Bernoulli (1667–1748) in pomeni začetek takrat novega matematičnega področja, *variacijskega računa*. Iskana krivulja je **cikloida**, ki je tudi razložena v knjigi. Beseda *brahistohrona* je grškega izvora. Prvi del izvira iz presežnika βράχιστος, *najkrajši*, pridevnika βραχύς, kar pomeni *kratek*. Drugi del pride iz besede χρόνος, *čas*. Baje se je Bernoulli zmotil in zapisal v latinščini *brachystochrona* namesto pravilno *brachistochrona*. Verjetno ga je zavedel *y* v besedi *brachys*, grško βραχύς. Pripomnimo, da Slovenci nismo enotni pri zamenjavi grške črke χ z ustrezno domačo črko. Včasih pišemo *h*, včasih *k*. Tako smo dobili iz χάος besedo *kaos*, iz χιτών pa besedo *hiton*, spodnje oblačilo pri starih Grkih. Nič čudnega, če najdemo v slovenščini tudi zapis **brahistokrona**. V grški mitologiji obstaja tudi Titan z imenom Kronos, grško Κρόνος, Zevsov oče, pa tudi Hronos, bog časa, grško Χρόνος. Imeni Κρόνος in Χρόνος zvenita zelo podobno, zato včasih pride do zmešnjave.

Kot klasičen primer slabo sestavljene besede Lo Bello navaja **kobordizem**. Predpona *ko*-, latinsko *co*- pomeni *skupaj, z nečim*. Drugi del izhaja iz francoske besede *bord*, angleške *border* ali poznolatinske *bordus* in pomeni *meja, rob*. Končnica -*izem*, grško -ισμος, latinsko -*ismus* pa označuje v sestavljenkah neki *nauk, smer, stanje, lastnost, posebnost*. **Kobordizem** je sicer urejena trojka objektov (W, M, N), pri čemer je W diferenciabilna mnogoterost, katere rob je disjunktna unija mnogoterosti M in N.

Azimut je beseda arabskega izvora. Nastala je iz besede *as-sumūt*, tudi *as-simūt*, arabsko السموت, kar je množina samostalnika *as-samt*, arabsko السمت, ki pomeni *pot, smer*. Pripomnimo, da imata zapisani arabski besedi določni člen *al*-, arabsko ال, v katerem pa se *l* včasih, na primer pred *s*, v izgovarjavi prilikuje naslednjemu soglasniku. Zato smo namesto *al*- zapisali *as*-. Težava je tudi v tem, da v arabščini ne pišejo samoglasnikov. Le ko je poudarek na pravilni izgovarjavi, dodajajo zanje dodatne znake. Lo Bello ima na koncu slabo zapisano definicijo azimuta. V astronomiji je azimut ena od koordinat nebesnega telesa v horizontskem koordinatnem sistemu. Druga koordinata je višina nebesnega telesa. Azimut je kot med meridianom in višinskim krogom nebesnega telesa.

Beseda **graf** je izvedena iz grškega glagola γράφω, kar pomeni *pišem, rišem, črtam*. V teoriji grafov obstaja tudi beseda **digraf** in marsikdo, ki v tej teoriji ni doma, bi najprej pomislil na latinsko predpono *di*-, ki pomeni neko *spremembo, ločitev*, ali pa na grško predpono δι- iz besede δίς, kar pomeni *dvakrat*. Tu avtor ne pove, da je *di*- pravzaprav okrajšava za angleško besedo *directed*. *Digraf* je namreč samo drug izraz za *usmerjeni graf*.

Predstavimo še nekaj znanih primerov. Veliko besed v matematiki ima končnici *-oida* oziroma *-oid*, na primer **cisoida, strofoida**, ki sta imeni krivulj, in bolj znane **elipsoid, romboid, trapezoid**. Končnici izvirata iz grških -ειδής za moški in ženski spol ter -ειδές za srednji spol iz samostalnika εἶδος, kar pomeni *oblika, lik, pogled, podoba*. *Bršljan* je v grščini κισσός. Če tej besedi odstranimo končni ος in ji dodamo -ο-ειδής, dobimo pridevnik κισσοειδής, v katerem pa v latinščini ει preide v *i* (tudi Εὐκλείδης je v latinščini *Euclides*, ali pa *ikona*, ki je nastala iz εἰκών, kar pomeni *slika, podoba*). Pridevnik κισσοειδής torej pomeni *podoben bršljanu*. Črta, krivulja, *podobna bršljanu*, je potemtakem κισσοειδὴς γραμμή. Zadnjo besedo so izpuščali, prva pa je postala samostalnik, v latinščino pa so jo prepisali kot *cissoida*, v francoščini *cissoïde*. V mislih imamo ves čas *Dioklovo cisoido*. Evklid v svojih Elementih uporablja besedi **romb** in **romboid** (ῥόμβος, ῥομβοειδὲς σχῆμα). **Romboid** torej pomeni lik, podoben **rombu**. Zanimivo je pri tem, da Evklid vsak štirikotnik, ki ni kvadrat, pravokotnik, romb ali romboid, imenuje **trapez**, v grščini τραπέζιον, ki je dal latinsko besedo *trapezium*. Evklid besede **trapezoid**, ki bi pomenila lik, podoben nam domačemu trapezu, ne pozna. V grščini je za *trapezoid* nastala beseda τραπεζοειδής. Uvedel jo je Proklos v 5. stoletju v svojih komentarjih k Evklidovim Elementom. V ZDA in Kanadi pomeni *trapezium* splošni štirikotnik v Evklidovem smislu, *trapezoid* pa naš običajni *trapez*, ki ima dve vzporedni stranici. Izvor obeh besed je τράπεζα, kar pomeni *miza* s štirimi nogami. Τραπέζιον pomeni tudi *mizica*. Lo Bello ne omenja, da je prvi zlog *tra* pravzaprav krajša oblika od *tetra*, ki nastopa na primer tudi v besedi **tetraeder**, izpeljani iz števnika τέτταρες, kar pomeni *štiri*. Drugi del besede τράπεζα je πέζα, kar pomeni *noga*, pa tudi *kraj, konec kake stvari*.

Knjiga je lahko kljub nekaterim spodrsljajem izvrsten pripomoček učiteljem, profesorjem in študentom matematike, še posebej tistim, ki pišejo in objavljajo v angleščini, pa tudi vsem drugim, ki jih zanima izvor in zgodovina matematičnih izrazov. Priporočamo jo vsakomur, ki se želi naučiti pravilno uporabljati in razumeti tisto sodobno matematično terminologijo, ki je nastajala dolga stoletja in temelji na originalnih izrazih iz stare grščine, latinščine in arabščine.

Anthony Lo Bello je profesor matematike na Allegheny College v Pensilvaniji in je avtor obsežnega dela, ki natančno obravnava širjenje in vpliv Evklidovih Elementov v srednjem veku.

Marko Razpet

MATEMATIČNE NOVICE

Število π in letošnji 14. marec

Peter Šemrl nam je prinesel naslednjo zanimivost. Letošnji 14. marec je marsikdo v ZDA označil kot 3/14/15. Na ta dan je bilo torej zjutraj, dobre pol minute po 9:26, »doseženo« število $\pi = 3.1415926535\cdots$

Kvadkopterji kot primer uporabe kontrolne teorije in matematičnih algoritmov

Kvadkopterji – mali helikopterji s štirimi elisami – so osupljiv primer uporabe novih tehnologij in matematičnega aparata, ki izvira iz teorije kontrole. V okviru t. i. *TED talks*, ki privlačno kažejo napredek in nove ideje, najdemo dve dobri predstavitvi [1, 2] teh dosežkov. V drugi predstavitvi vidimo celo sodelovanje treh takih helikopterjev, ki nosijo mrežo in z njo mečejo in lovijo žogo! Zelo verjetno bodo tako lovili tudi zračna plovila, ki vohunijo po prepovedanih območjih.

Ob zadnjih poplavah v Ljubljani je recimo s takim trotom in nanj pritrjeno akcijsko kamero (cena kamere 400 EUR) nastal posnetek [3], ki se lahko enakovredno meri s posnetki poklicnega snemalca iz policijskega helikopterja. (Pravzaprav nekaterih bolj tveganih stvari v tem videu z velikim helikopterjem niti ne bi bilo mogoče narediti.)

Podobna kombinacija kvadkopterja za 500 EUR, akcijske kamere za približno isto vsoto in nekaj sreče pa je omogočila neverjetne posnetke vulkanskega izbruha [4] na tihomorskem otoku. Mimogrede, na klasično posnetih videih [5, 6] zelo dobro vidimo udarni val podobnih vulkanskih eksplozij.

Algoritmi in posojanje

Članek [7] opisuje sorazmerno nov pojav na finančnem trgu v ZDA. To so platforme za neposredno posojanje manjših zneskov, od tisoč do 35 tisoč dolarjev.

Stvar je nastala zaradi nedavne finančne krize, velike zadolženosti gospodinjstev in posledične previdnosti bank. Te malo posojajo, obrestne mere za posojila pa se v ZDA večinoma začnejo pri 10 odstotkih. Varčevalcem te banke ne izplačujejo skoraj nikakršnih obresti. (V najboljših časih stabilnosti in gospodarske rasti naj bi ameriške banke po tem članku posojale po obrestni meri 6 odstotkov, varčevalcem pa izplačevale 3 odstotke obresti. Slabih posojil je bilo v dobrih časih, tudi zaradi profesionalnosti in konservativnosti bankirjev, manj kot 3 odstotke.)

Vsakdo z nekaj denarja (zadošča že 25 dolarjev) lahko čez tovrstno internetno platformo kratkoročno (doba vračanja je največ 5 let) posodi denar. Tisti, ki zaprosi za posojilo, mora kot navadno navesti svoj letni dohodek in namen porabe, naslov ipd. Na platformi se tudi vidi, ali je oseba že kdaj tu zaprosila za posojilo. V ZDA in tudi drugod obstajajo ustanove, ki zbirajo podatke o posojilojemalcih in zanje izračunajo kreditno oceno. Če kdo kdaj ni vrnil posojila, ima seveda nizko oceno. (Nekatere od teh ustanov uporabljajo tudi vprašljive kriterije: kdor živi v revni četrti, avtomatično dobi nižjo oceno.) Platforma na podlagi kreditne ocene in v skladu z dolžino dobe vračanja izračuna letno obrestno mero. Za krajše obdobje je obrestna mera nižja. Za triletna posojila ljudje z najboljšo kreditno oceno letno plačajo nekako od 6 do 12 odstotkov. Za tiste z najslabšo oceno letne obrestne mere lahko znašajo 26 odstotkov. K temu pride od pol do pet odstotkov enkratne provizije. (Če se komu te številke zdijo visoke, mora upoštevati, da ima le 15 od 50 držav v ZDA omembe vredne zakone proti oderuštvu, ki efektivno letno obrestno mero omejujejo na manj kot 60 odstotkov [8].)

Posojilne platforme začenjajo ogrožati posojilno in varčevalno vlogo bank. Večina posojilodajalcev zelo razprši svoje naložbe in tako zmanjša tveganje izgube denarja zaradi plačilne nezmožnosti posojilojemalca. Pri tem lahko posojila filtrirajo po prej navedenih podatkih. (Od 1 do 10 odstotkov posojil ni vrnjenih. Tvegana so recimo posojila v poslovne namene.) Kriteriji platform za določanje obrestnih mer so za zdaj še precej grobi. Tisti, ki se poglobijo v statistike, lahko večkrat bolje ocenijo donose kot platforma sama in z ustreznim filtriranjem maksimizirajo dobiček. Žal so se tudi tu vmešali »hedge« skladi. Ti imajo na voljo veliko kapitala, filtriranje pa so izpopolnili in avtomatizirali. S svojimi algoritmi na platformah bliskovito poberejo potencialno najbolj donosna posojila in malim vlagateljem tako zmanjšajo donose.

LITERATURA

[1] R. D'Andrea, *The astounding athletic power of quadcopters*, http://www.ted.com/talks/raffaello_d_andrea_the_astounding_athletic_power_of_quadcopters, ogled 6. 7. 2015.

[2] V. Kumar, *Robots that fly and cooperate* http://www.ted.com/talks/vijay_kumar_robots_that_fly_and_cooperate, ogled 6. 7. 2015.

[3] M. Bončina, *Poplave na Viču 2014*, http://vimeo.com/109711342, ogled 6. 7. 2015.

[4] S. O'Callaghan, *Dji Phantom flies into Volcano*, https://www.youtube.com/watch?v=0-shWVW1UBc, ogled 6. 7. 2015.

[5] J. Reynolds, *Izbruh vulkana Sakurajima*, https://www.youtube.com/watch?v=3XTVZmAtu0s, ogled 6. 7. 2015.

[6] Izbruh vulkana Tavurvur http://geotripper.blogspot.com/2014/09/in-case-you-havent-seen-it-shock-wave.html, ogled 6. 7. 2015.

[7] What you need to know about Lending Club and Prosper http://www.consumerreports.org/cro/news/2015/01/what-to-know-about-lending-club-and-prosper-peer-to-peer/index.htm, ogled 6. 7. 2015.

[8] Payday lenders: Small loans, hefty fees, big problem http://www.consumerreports.org/cro/aboutus/mission/viewpoint/small-loan-big-problems/overview/small-loan-big-trouble-ov.htm, ogled 6. 7. 2015.

Peter Legiša

STROKOVNA EKSKURZIJA DMFA 2015 V ZAGREB

V soboto 3. oktobra 2015 smo obiskali Institut Rudjer Bošković v Zagrebu. Ogledali smo si dva laboratorija.

V Centru za pozitronsko tomografijo (PET, *positron emission tomography*) proizvajajo radiofarmacevtike 18F-FDG (Fluorodeoksiglukoza z radioaktivnim izozopom fluor 18). Prof. dr. Alfred Švarc nam je pokazal in izčrpno razložil ciklotron, ki proizvaja izotop 18F (*Ruđer Medikol Ciklotron*) in eksperimentalno delo na mikro-PET kameri.

Po laboratoriju za interakcije ionskih snopov pa nas je vodil dr. Milko Jakšič. Pokazal nam je eksperimentalne naprave za osnovne in uporabne raziskave, zlasti za nedestruktivne analitične metode.

Za kulturni dodatek smo si popoldne ogledali v Muzeju Mimara bogato zbirko slik iz šol znamenitih starih mojstrov, ki jih je zbral hrvaški zbiratelj Ante Topić Mimara. Ogledali smo si tudi Muzej sodobne umetnosti.

SESTAVLJAMO SPISEK, KOGA NAJ OBVESTIMO ZA EKSKURZIJE V LETU 2016. Če se zanimate in bi radi dobivali obvestila, pišite na naslov: mitja.rosina@ijs.si.

Mitja Rosina

OSMA SLOVENSKA KONFERENCA IZ TEORIJE GRAFOV

Med 21. in 27. junijem 2015 je v Kranjski Gori potekala »Osma slovenska konferenca iz teorije grafov«,[1] ki se je je udeležilo 287 udeležencev iz 40 držav. S tem je ta konferenca postala največje in najpomembnejše svetovno srečanje, posvečeno teoriji grafov, hkrati pa je tudi potrdila osrednjo vlogo slovenske teorije grafov v svetu. Seveda ni presenečenje, da je bila med vsemi državami najbolje zastopana Slovenija, vsaj po deset udeležencev na konferenci pa so imele tudi ZDA, Kitajska, Nemčija, Madžarska, Kanada, Italija, Slovaška, Republika Južna Afrika in Japonska. Na drugi strani so bile z enim predstavnikom zastopane Armenija, Hongkong, Indonezija, Makedonija, Portugalska, Singapur in Švedska.

Kot je razvidno iz naslova konference, gre za osmo konferenco iz serije konferenc, ki so v svetu znane tudi kot »blejske konference«. Zgodovina teh srečanj sega v leto 1985, ko je bila organizirana prva konferenca in sicer v Dubrovniku. Naslednjih šest konferenc je bilo na Bledu (v letih 1991, 1995, 1999, 2003, 2007 in 2011), od tod tudi njihovo pogovorno ime. Odločitev, da srečanje tokrat organiziramo v Kranjski Gori, je bila zato vse prej kot lahka. Število udeležencev in njihovi izjemno pozitivni odzivi na lokacijo ter na samo izvedbo dogodka pa so najboljši dokaz, da je bila odločitev pravilna. Čeprav se je država (preko ARRS) pred časom odločila, da ne bo več podpirala organizacije konferenc, smo dogodek izpeljali brez težav, saj smo imeli podporo Inštituta za matematiko, fiziko in mehaniko, ki je bil institucionalni organizator konference, podpore pa smo bili deležni tudi od vseh treh javnih slovenskih univerz. Zelo dobrodošla je bila tudi tehnična podpora podjetja Abelium d. o. o.

Na konferenci je bilo 247 predavanj, med katerimi je bilo devet plenarnih, ki so jih izvedli Michael Giudici (Avstralija), Michael Henning (Republika Južna Afrika), Brendan McKay (Avstralija), Alexander Mednykh (Rusija), Joy Morris (Kanada), Gábor Tardos (Madžarska), Carsten Thomassen (Danska), Thomas Tucker (ZDA) in Douglas West (Kitajska in ZDA). Druga predavanja so potekala v vzporednih sekcijah. Poleg splošnih sekcij so bila predavanja organizirana tudi v okviru 13 minisimpozijev, kar je po eni strani olajšalo organizacijo predavanj, po drugi pa omogočilo udeležencem bolj poglobljeno delo. Minisimpoziji so pokrivali naslednja področja: uporaba teorije grup v teoriji grafov; asociativne sheme; kemijska teorija grafov; kombinatorika; končne geometrije; dominacija v grafih; vložitve grafov in simetrije zemljevidov; produkti grafov; metrična dimenzija in sorodni

[1] 8th Slovenian Conference on Graph Theory

parametri; politopi in grafi; spektralna teorija grafov; struktura in lastnosti vozliščno-tranzitivnih grafov; vozliščna barvanja in prepovedani podgrafi.

V družabnem delu konference smo vzporedno organizirali tri izlete, in sicer na Bled, v Trento in kolesarski izlet. Vsi izleti so bili lepo sprejeti, kolesarjenja pa so se še posebej razveselili športni navdušenci.

Organizatorji konference so opravili izjemno delo in se jim za njihovo požrtvovalno delo iskreno zahvaljujem. Poleg zadev, ki so običajne za konference in jih udeleženci pričakujejo kot samoumevne, je bilo narejenih tudi več stvari, ki so nivo organizacije dvignile za stopnico višje od običajnih standardov. Prav poseben poudarek je bil namenjen oblikovanju gradiv za udeležence, kot je to na primer urnik konference. Izpostavim naj tudi izdajo dnevnega časopisa z imenom »The teleGraph«, ki je izšel vsak dan konference (izšlo je šest posameznih številk) in je udeležence konference vsako jutro v tiskani obliki pričakal na hotelskih recepcijah. Poleg dnevnih novic in praktičnih informacij za udeležence je časnik vseboval tudi podlistek z dnevno matematično uganko. Časnik je naložen tudi na spletni strani konference (`kg15.imfm.si`), kjer bralce Obzornika vabimo, da si ogledajo tudi druge podrobnosti o dogodku, na primer zgoraj omenjeni urnik konference.

Sandi Klavžar

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, JULIJ 2015
Letnik 62, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

CONTENTS

Na naslovnici: Crooksov svetlobni mlinček je vrsta radiometra. Sestavljen je iz nepredušne bučke, v kateri je delni vakuum, in niza lopatic na gredi. Lopatice se vrtijo, ko je mlinček osvetljen. Fotografija: Aleš Mohorič