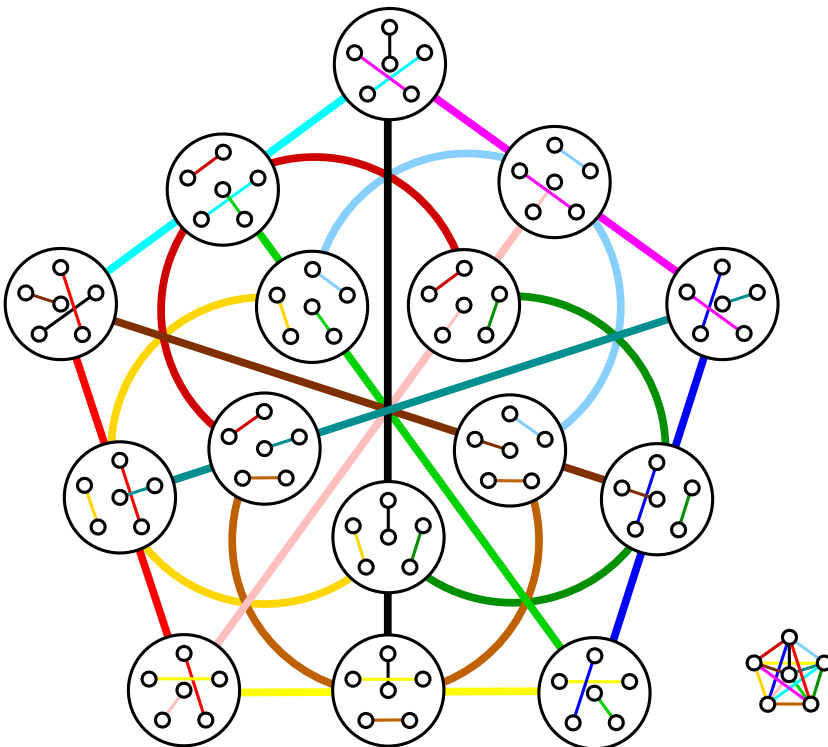


2025
Letnik 72
2

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, SEPTEMBER 2025, letnik 72, številka 2, strani 41–80

Naslov uredništva: DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** zalozba@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664
Mednarodna nakazila: Nova Ljubljanska banka d.d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBASIX **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

Uredniški odbor: Peter Legiša, Sašo Strle, Bojan Kuzma (urednik za matematiko), Aleš Mohorič (tehnični urednik, urednik za fiziko in odgovorni urednik), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl.

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 150 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 60 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2025 DMFA Slovenije

Članki so objavljeni z licenco CC BY-SA

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželeno velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

SVET BREZ TRIKOTNIKOV

ALEKSANDAR JURIŠIĆ¹

¹Fakulteta za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani

Math. Subj. Class. (2010): 51E12, 51E14, 05A20, 05B25, 05C35, 05C50, 05E30

Podamo kratek uvod v posplošene četverokotnike (nekaj enostavnih lastnosti in konstrukcij). Poenostavljeno gre za končne geometrije brez trikotnikov (v nasprotju s projektivnimi ravninami). So tudi poseben primer delnih geometrij, pa tudi posplošenih n -kotnikov. Grafi kolinearnosti delnih geometrij so krepko regularni, kar vodi do lastnosti lastnih vrednosti grafov, pa tudi Moorovih grafov (tj. grafov, pri katerih velja, da je ožina enaka dvakratniku premera, povečanega za 1, npr. petkotnik ter Petersenov graf). Na koncu so izpostavljeni nekateri odprti problemi in naloge, ki vodijo bralca od osnov do sodobnih vprašanj na presečišču končnih geometrij in grafov.

A UNIVERSE WITHOUT TRIANGLES

A brief introduction to generalized quadrilaterals is presented (some simple properties and constructions). In simple terms these are finite geometries with no triangles (in contrast to projective planes). They are also a special case of partial geometries, and of generalized n -gons. The collinearity graphs of partial geometries are strongly regular, which leads to properties of graph eigenvalues and also to Moore graphs (i.e., graphs in which the girth equals twice the diameter plus one, such as the pentagon and the Petersen graph). Finally, some open problems and exercises are presented guiding the reader from the basics to modern questions at the intersection of finite geometries and graphs.

Uvod

Opazujmo premice v ravnini. Dve premici se tu bodisi sekata ali pa sta vzporedni. Hitro se prepričamo tudi, da je število presečišč treh premic lahko le 0, 1, 2 ali 3. Na splošno množica n -tih premic določa največ $n(n-1)/2 = \binom{n}{2}$ presečišč, lahko pa tudi nobenega. Spodnjo mejo dosežemo, če so premice vzporedne. *Kaj pa zgornjo?*

Ste že kdaj poskusili najti v ravnini tak par množic $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 9 točk in 10 premic, da vsebuje vsaka premica $\ell \in \mathcal{L}$ natanko tri točke iz $\mathcal{P}$?

Vsekakor gre za zanimivo nalogo. Rešitev je na sliki 19, na koncu 9. razdelka.

Tudi v tem sestavku nas bo zanimal par končnih množic točk in premic $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, ki bo imel podobne, a morda še bolj zanimive lastnosti. Največja razlika bo, da sploh ne bomo delali v ravnini, temveč samo v končni množici točk, ki niso nujno v nekem prostoru, pač pa kar v naših mislih. *Premice*

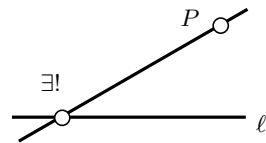
ne bodo nujno ravne (saj veste, v sanjah je marsikaj mogoče), pač pa bo šlo samo za *podmnožice točk*. Kljub neotipljivim mislim in sanjam pa nas bodo izbrane lastnosti gnale do čudovitih objektov, kot sta poleg Petersenovega grafa (10 vozlišč) še npr. Hoffman-Singletonov graf (50) ali Higman-Simsov graf (če se ustavimo pri velikosti 100).

V 1. razdelku predstavimo aksiome geometrije, ki jo imenujejo *posplošeni četverokotniki*, ter preštejemo njene točke. V 2. razdelku vpeljemo dualnost in začnemo proučevati osnovne lastnosti te geometrije, v naslednjem pa spoznamo nekaj lažjih konstrukcij. Prvi resnejši primer obdelamo v 4. razdelku. V 5. razdelku definicijo posplošimo na *delne geometrije* ter na pomoč pripeljemo grafe in v 6. razdelku še nekaj malega linearne algebre (oz. teorije asociativnih shem). V 7. razdelku predstavimo Moorove grafe, v naslednjem pa še dvodelne ekstremne grafe, ki jih je Tits poimenoval posplošeni večkotniki. Brez dokaza omenimo sloviti rezultat Feita in Higmana, iz katerega je razvidno, da so posplošeni četverokotniki z začetka presenetljivo povezani tudi z bolj poznanimi projektivnimi ravninami. V zaključku pogledamo na prehojeno pot in nazadnje zastavimo še nekaj nalog.

1. Posplošeni četverokotniki

Spomnimo se, da za točki, ki ležita na skupni premici, rečemo, da sta *kolinearni*. Vpeljimo geometrijo $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$, kjer je $\mathcal{P}$ množica točk (angl. points) in $\mathcal{L}$ množica premic (angl. lines), s parametroma $s, t \in \mathbb{N}$, za katero veljajo naslednji aksiomi:

- (A0) Skozi poljubni različni točki iz $\mathcal{P}$ obstaja največ ena premica iz $\mathcal{L}$.
- (A1) Vsaka točka $P \in \mathcal{P}$ leži na $t + 1$ premicah iz $\mathcal{L}$.
- (A2) Vsaka premica $\ell \in \mathcal{L}$ vsebuje $s + 1$ točk iz $\mathcal{P}$.
- (A3) Za vsako premico $\ell \in \mathcal{L}$ in točko $P \in \mathcal{P}$, ki ne leži na tej premici, obstaja *natanko določena* premica iz $\mathcal{L}$ skozi točko P , ki seka premico ℓ (glej sliko 1).

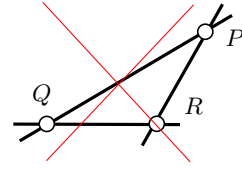


Slika 1: Aksiom (A3)

Geometrije s temi aksiomi imenujemo *posplošeni četverokotniki* (angl. generalized quadrangles) in označimo z $\text{GQ}(s, t)$. Aksiom (A0) nam zagotavlja, da se poljubni premici iz $\mathcal{L}$ sekata v največ eni točki. Prepričaj se, da lahko zaradi aksioma (A0) aksiom (A3) zamenjamo z izjavo: *na premici ℓ obstaja natanko določena točka, ki je kolinearna s točko P* .

Lema 1. V $\text{GQ}(s, t)$ ni trikotnikov, tj. treh paroma kolinearnih točk.

Dokaz. Če bi na primer obstajal trikotnik PQR (glej sliko 2), bi namreč za točko P in premico QR imeli dve premici (PQ in PR) skozi točko P , ki sekata premico QR . To pa bi bilo v nasprotju z aksiomom (A3). $\square$

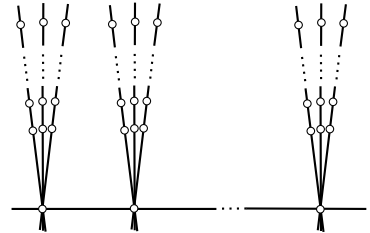


Slika 2: Trikotniki niso možni

V $GQ(s, t)$ lahko velikost množice $\mathcal{P}$ izrazimo s parametroma s in t .

Trditev 2. Število vseh točk v posplošenem četverokotniku $GQ(s, t)$ je natanko $(s + 1)(ts + 1)$.

Dokaz. Izberimo neko premico $\ell \in \mathcal{L}$. Na njej leži $s + 1$ točk. Za vsako drugo točko iz $\mathcal{P}$ velja po (A3), da leži na natanko določeni premici, ki seka premico ℓ . Skozi vsako izmed točk na ℓ gre poleg ℓ še t drugih premic. Na vsaki izmed teh t premic leži poleg točke na ℓ še s drugih točk (glej sliko 3). Po (A0) in lemi 1 med temi točkami ni prekrivanja in je vseh točk v $\mathcal{P}$ natanko $(s + 1) + (s + 1)ts = (s + 1)(ts + 1)$. $\square$



Slika 3: Štetje točk v $GQ(s, t)$

2. Dualnost

V vsaki izjavi o geometriji lahko zamenjamo vloži točk in premic ter še nekaj izrazov, kot so *kolinearnost* in *sekati se* ali pa *leži na* in *gre skozi*. Na ta način pridemo do *dualne* izjave. Oglejmo si nekaj primerov:

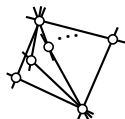
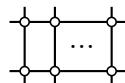
- premici se sekata $\rightarrow$ točki sta kolinearni,
- točka leži na premici $\rightarrow$ premica vsebuje točko.

Če dualna izjava trdi isto kot originalna, kot se je zgodilo v drugem primeru, potem pravimo, da gre za *sebi-dualno* izjavo.

Na poljubnem primeru se prepričajte, da je *dualni* dokaz neke trditve v resnici dokaz dualne trditve. V poljubni geometriji točke A, B, C, D predstavljajo *četverokotnik*, če so $\{A, B\}$, $\{B, C\}$, $\{C, D\}$ in $\{D, A\}$ pari kolinearnih točk, para $\{A, C\}$, $\{B, D\}$ pa nista taka (glej sliko 7(a)).

Lema 3. V posplošenem četverokotniku $GQ(s, t)$ velja:

- (a) poljubni nekolinearni točki sta hkrati kolinearni z natanko $t + 1$ točkami, le-te pa so paroma nekolinearne (glej sliko 4),
- (b) poljubni premici, ki se ne sekata, določata lestev $(s + 1) \times 2$, tj. hkrati ju seka natanko $s + 1$ premic, le-te pa se paroma ne sekajo (glej sliko 5),
- (c) poljubni točki ležita v nekem četverokotniku.

Slika 4: $t + 1$ točk

Slika 5: Lestev

Dokaz. (a) Naj bosta A in B nekolinearni točki. Po aksiomu (A1) gre skozi točko A natanko $t + 1$ premic. Po aksiomu (A3) pa na vsaki od teh premic leži natanko ena točka, ki je kolinearna s točko B . Skupaj dobimo torej natanko $t + 1$ točk (aksiom (A0)), ki so kolinearne z A in B hkrati, paroma pa niso kolinearne po lemi 1.

(b) To je ravno dual prve trditve (ne bo škodilo, če bralec za vajo dokaz iz (a) res 'dualizira').

(c) Če začnemo z dvema nekolinearnima točkama, si pomagamo s točko (a), sicer pa uporabimo točko (b) (glej sliko 5), kajti na lestvi hitro najdemo četverokotnik. $\square$

Tudi iz dane geometrije $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ lahko dobimo novo, t. i. *dualno* geometrijo $(\mathcal{P}', \mathcal{L}')$, tako da zamenjamo vlogi točk in premic, tj. $(\mathcal{P}', \mathcal{L}') = (\mathcal{L}, \mathcal{P})$. Oglejmo si, kaj se v tem primeru zgodi z aksiomi posplošenega četverokotnika.

- (B0) Na dveh različnih premicah iz $\mathcal{L}$ obstaja največ ena skupna točka iz $\mathcal{P}$.
- (B1) Vsaka premica $\ell \in \mathcal{L}$ vsebuje $t + 1$ točk iz $\mathcal{P}$.
- (B2) Vsaka točka $P \in \mathcal{P}$ leži na $s + 1$ premicah $\mathcal{L}$.
- (B3) Za vsako točko $P \in \mathcal{P}$ in premico $\ell \in \mathcal{L}$, ki ne vsebuje te točke, obstaja natanko določena točka na premici ℓ , ki je na skupni premici s točko P .

Aksioma (A0) in (A3) sta sebi-dualna (tj. aksioma (A0) in (B0) sta odvisna drug od drugega, enako pa velja za (A3) in (B3)), pri aksiomih (A1) in (A2) pa se je spremenil le vrstni red, kar pomeni, da smo iz $\text{GQ}(s, t)$ dobili

$GQ(t, s)$. Sedaj lahko uporabimo trditev 2 za izračun števila $|\mathcal{L}|$, tj. števila premic v $GQ(s, t)$.

Posledica 4. *Število vseh premic v posplošenem četverokotniku $GQ(s, t)$ je $(t+1)(ts+1)$.* $\square$

3. Enostavnejše konstrukcije

Podali smo definicijo geometrije, za katero smo zahtevali, da veljajo neki čisto novi aksiomi. Na splošno obstaja velika nevarnost, da ni nobenega primera take geometrije ali pa veliko nezanimivih. Izkazalo pa se je, da za posplošene četverokotnike to na srečo ne drži. Najmanjši primer te geometrije, za $s = t = 1$, je četverokotnik. Naša geometrija ima torej kar pravšnje ime. Poiščimo še kakšen večji primer posplošenega četverokotnika. Naj bo $n \geq 2$ in $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Potem geometriji s točkami (i, j) za $i, j \in \mathbb{Z}_n$ in premicami

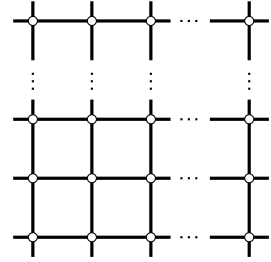
$$\{(a, c) \mid a \in \mathbb{Z}_n\} \text{ za vsak } c \in \mathbb{Z}_n \quad \text{in} \quad \{(c, a) \mid a \in \mathbb{Z}_n\} \text{ za vsak } c \in \mathbb{Z}_n$$

rečemo $(n \times n)$ -mreža. Ta geometrija je posplošen četverokotnik $GQ(n-1, 1)$. Podmnožici premic neke geometrije, ki predstavljajo razdelitev (particijo) vseh točk te geometrije, pravimo *razpetje* (obstoj takšne podmnožice v $GQ(s, t)$ ni zagotovljen, njena velikost pa mora biti enaka $st+1$), npr. prva oz. druga skupina zgornjih premic je razpetje za $GQ(n-1, 1)$.

Četverokotnik lahko narišemo v ravnini na več različnih načinov (glej sliko 7(a)). Za našo geometrijo, ki v resnici ne ve za ravnino, to ni pomembno. Če lahko za točke dveh geometrij poiščemo tako bijekcijo, ki ohranja *kolinearnost*, rečemo, da sta geometriji *izomorfni*.

Trditev 5. *Posplošen četverokotnik $GQ(s, 1)$ je izomorfen $((s+1) \times (s+1))$ -mreži oz. je enoličen (glej sliko 6).*

Dokaz. Naj bo h_0 poljubna premica v geometriji $\text{GQ}(s, 1)$. Zaradi $t = 1$ gre skozi vsako točko premice h_0 poleg h_0 še natanko ena premica. Označimo te premice z $v_0, \dots, v_s$. Ker sekajo premico h_0 , se po lemi 1 medsebojno ne sekajo. Torej tvorijo razpetje. Na enak način ugotovimo tudi, da sekajo premico v_0 poleg premice h_0 še premice $h_1, \dots, h_s$. Tudi premice $h_0, \dots, h_s$ tvorijo razpetje. Po askiomu (A3) vsaka točka leži na natanko določeni premici h_i , ter natanko določeni premici v_j ($i, j \in \mathbb{Z}_{s+1}$), zato jo lahko označimo z (i, j) . Potem je $h_i = \{(a, i) \mid a \in \mathbb{Z}_n\}$ in $v_j = \{(j, a) \mid a \in \mathbb{Z}_n\}$ za $i, j \in \mathbb{Z}_n$, kar smo želeli pokazati. $\square$

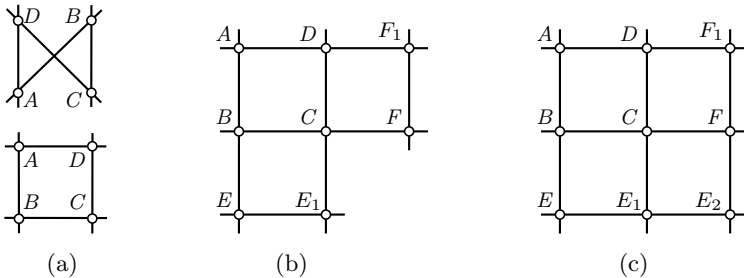
Slika 6: $\text{GQ}(s, 1)$

Zgornja trditev nam torej zagotavlja, da obstaja (do izomorfizma) en sam posplošen četverokotnik $\text{GQ}(s, 1)$. To nam omogoča, da označimo $((s+1) \times (s+1))$ -mrežo kar z $\text{GQ}(s, 1)$. Tudi v primeru $\text{GQ}(1, t)$ gre za natanko določeno geometrijo (glej 1. nalogo).

Odslej naj bosta oba parametra s in t večja od 1. Za začetek privzemimo $s = 2$.

Lema 6. *Naj bo $\mathcal{G}$ posplošen četverokotnik $\text{GQ}(2, t)$, $t \geq 2$. Poljubne štiri točke, ki določajo četverokotnik, lahko dopolnimo na natanko en način s petimi točkami tako, da 9 točk s kolinearnostjo iz $\mathcal{G}$ določa (3×3) -mrežo (glej sliko 7(c)).*

Dokaz. Naj bo $ABCD$ četverokotnik. Zaradi leme 1 se premici AB in CD ne sekata, enako pa velja tudi za premici BC in DA . Ker je $s = 2$, obstajata po Lemi 3(b) premica, ki seka obe premici AB in CD , ter premica, ki seka premici BC in DA . Označimo presečišči prve premice zaporedoma z E in E_1 , druge pa zaporedoma s F in F_1 (glej sliko 7(b)),



Slika 7. (a) Množica premic je v obeh primerih enaka:

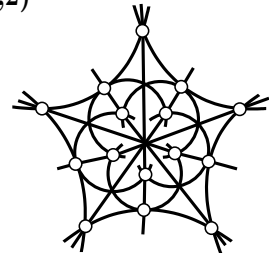
$$\{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, A\}\},$$

(b) skoraj 3×3 mreža, (c) 3×3 mreža.

še neimenovano tretjo točko na premici EE_1 pa z E_2 . Točki E in F nista kolinearni, ker bi sicer imeli trikotnik BEF . Prav tako tudi točki E_1 in F nista kolinearni (ker bi sicer imeli trikotnik CE_1F_1). Tako mora biti po aksiomu (A3) točka F kolinearna z neko točko na premici EE_1 , vendar slednja vsebuje le še E_2 . Zaključimo, da sta F in E_2 kolinearni, enak razmislek pa pokaže, da sta kolinearni tudi F_1 in E_2 . Ker so točke F , F_1 in E_2 paroma kolinearne in v geometriji ni trikotnikov, morajo ležati na skupni premici (glej sliko 7(c)). $\square$

4. Posplošeni četverokotnik $GQ(2,2)$

Vsak posplošen četverokotnik $GQ(2,2)$ sestavljajo premice, na katerih so natanko tri točke, skozi vsako točko pa gredo natanko tri premice. V $GQ(2,2)$ imamo torej 15 točk in 15 premic (glej npr. sliko 8).



Slika 8: $GQ(2,2)$

Kombinatorična predstavitev

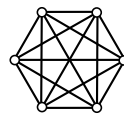
Naj bo $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Za točke vzemimo vse možne (neurejene) pare števil iz množice V . Vseh 15 smo našeli v tabeli 1. Množico V lahko s tremi pari števil razbijemo na tri dele, npr.

$$\{\{1,2\}, \{3,4\}, \{5,6\}\} \text{ ali } \{\{1,3\}, \{2,4\}, \{5,6\}\}.$$

Takih razbitij množice V na tri pare je natanko 15 (glej tabelo 1 in sliko 9). Ta razbitja bodo predstavljala premice. Rekli bomo, da točka $\{i, j\}$ leži na premici natanko tedaj, ko ustrezno razbitje vsebuje par $\{i, j\}$.

toke	premice
$\{1, 2\}$	$\{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$
$\{1, 3\}$	$\{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$
$\{1, 4\}$	$\{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$
$\{1, 5\}$	$\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$
$\{1, 6\}$	$\{\{1, 3\}, \{2, 5\}, \{4, 6\}\}$
$\{2, 3\}$	$\{\{1, 3\}, \{2, 6\}, \{4, 5\}\}$
$\{2, 4\}$	$\{\{1, 4\}, \{2, 3\}, \{5, 6\}\}$
$\{2, 5\}$	$\{\{1, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 6\}\}$
$\{2, 6\}$	$\{\{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 5\}\}$
$\{3, 4\}$	$\{\{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4, 6\}\}$
$\{3, 5\}$	$\{\{1, 5\}, \{2, 4\}, \{3, 6\}\}$
$\{3, 6\}$	$\{\{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}\}$
$\{4, 5\}$	$\{\{1, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$
$\{4, 6\}$	$\{\{1, 6\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}\}$
$\{5, 6\}$	$\{\{1, 6\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}\}$

Tabela 1



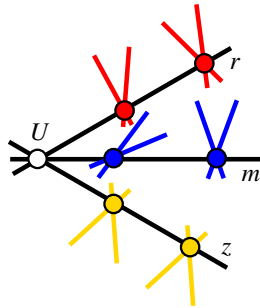
Slika 9: Poln graf K_6 ima 15 povezav. V tem kontekstu pravimo razbitju prirejanje in ga sestavljajo 3 povezave. Za prvo povezavo imamo 15 možnosti, za drugo 6 (število povezav v K_4), tretja pa je potem določena; ker pa vrstni red izbire povezav ni pomemben, moramo še deliti s $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, da dobimo 15.

Ali tabela 1 res predstavlja posplošen četverokotnik $GQ(2, 2)$? Aksioma (A0) in (A2) sta očitno izpolnjena. Sedaj pa preverimo, ali vsaka točka leži na treh različnih premicah. Premice, na katerih leži npr. točka $\{1, 2\}$, so natanko $p_1 := \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$, $p_2 := \{\{1, 2\}, \{3, 5\}, \{4, 6\}\}$ in $p_3 := \{\{1, 2\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}\}$. Točko $\{1, 2\}$ štejemo za poljubno točko, saj lahko oznake za elemente množice V vedno premešamo tako, da bo izbrana točka imela prav te oznake. Torej za našo konstrukcijo velja aksiom (A1). Preverimo še aksiom (A3). Tokrat začnimo s točko $P = \{1, 2\}$ in premico $\ell = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5, 6\}\}$, ki ne vsebuje točke P . Že prej smo ugotovili, da točka $\{1, 2\}$ leži na premicah p_1 , p_2 ter p_3 in res med njimi le premica p_1 seka premico ℓ (konkretno se to zgodi v točki $\{5, 6\}$). Tudi v tem primeru bi lahko premešali oznake množice V tako, da bi poljubni par (točka, premica), kjer točka ne leži na tej premici, imel prav takšne oznake kot par (P, ℓ) . Torej smo se prepričali, da naša konstrukcija iz tabele 1 ustreza aksiomom za geometrijo $GQ(2, 2)$.

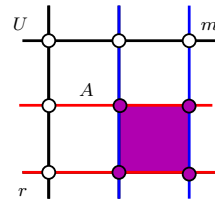
Izrek 7. *Obstaja le ena geometrija $GQ(2, 2)$, namreč zgoraj konstruirana.*

Dokaz (Skica dokaza). Naj bo $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ posplošen četverokotnik $GQ(2, 2)$ in $U \in \mathcal{P}$. Označimo z r (rdeča), m (modra) in z (zlata, čeprav mislimo na rumeno) premice skozi točko U . Na vsaki od teh treh premic sta poleg točke U še dve točki. Vsaka izmed preostalih $15 - 3 = 12$ premic, ki jim bomo rekli *nove*, vsebuje zaradi leme 1 natanko eno izmed teh 6 točk. Nove

premice pobarvajmo z rdečo, modro ali zlato glede na to, ali sekajo premico r , m ali z . Zlate premice se po lemi 1 sekajo le na premici z , tako pokrijejo prav vseh preostalih $15 - 7 = 8$ točk. Tudi slednjim bomo rekli *nove*. Enak razmislek velja za modre in rdeče premice. Vsaka nova premica gre torej skozi eno od točk na premicah r , m in z ter skozi dve točki od novih osmih, vsaka nova točka pa leži na eni rdeči, eni modri in eni zlati premici. Oglejmo si, kako se prepletajo premice dveh različnih barv. Naj bosta ti barvi npr. rdeča ter modra in naj bo A ena od novih točk. Potem točka A skupaj s svojo rdečo in modro premico ter s premicama r in m določa četverkotnik, ki po lemi 6 določa (3×3) -mrežo. Le-to sestavljata še ena modra in ena rdeča premica. Z drugimi besedami, prišli smo do “vijoličnega” četverkotnika na novih točkah.



Slika 10: Dual slike 3

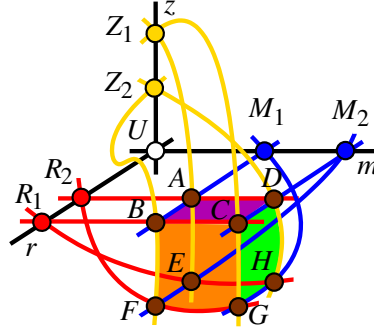


Slika 11: Vijolična ploskev

Izberimo še eno novo točko, ki ni v tem vijoličnem četverkotniku. Po pravkar povedanem je tudi ta točka v nekem drugem vijoličnem četverkotniku, ki s prvim nima nobene skupne točke, kar pomeni, da vijolična četverkotnika pokrivata vse nove točke. Na enak način tudi dva oranžna četverkotnika (kombinacija, ki jo dobimo, če začnemo z rdečo in zlato) oziroma dva zelena četverkotnika (modra in zlata) pokrivata vse nove točke. Gotovo ste že pomislili, da ima kocka 8 oglišč (nove točke), 12 robov (nove premice) in 6 lic (štirikotniki). Res je, pokazali bomo, da nove premice na novih točkah tvorijo ravno kocko. Ker si kocko po navadi predstavljamo v trirazsežnem prostoru, v mislih tja postavimo tudi naših novih 8 točk. Po klasifikaciji Platonovih teles sedaj ni več nobene druge možnosti, kot da gre res za kocko, pri čemer so nove premice povezane z novimi točkami, kot kaže slika 12. $\square$

Opomba 8.

(i) V resnici se nam ne bi bilo treba sklicevati na Platona, saj mora kombinacija dveh barv četverokotnikov sestavljati plašč, tretja barva pa je potem le še podstavek in pokrov. S tem je naša konstrukcija končana, saj smo povezali vse nove točke z novimi premicami.

Slika 12: $GQ(2, 2)$ s kocko

(ii) Točke s slike 12 ustrezajo točkam kombinatorične konstrukcije, npr. na naslednji način:

U	R ₁	R ₂	M ₁	M ₂	Z ₁	Z ₂	A	B
{1,2}	{3,4}	{5,6}	{3,5}	{4,6}	{3,6}	{4,5}	{2,5}	{1,6}
C	D	E	F	G	H			
{2,4}	{1,3}	{1,4}	{2,3}	{1,5}	{2,6}			

5. Druge geometrije in povezava z grafi

V definiciji posplošenega četverokotnika $GQ(s, t)$ nadomestimo aksiom (A3) z aksiomom:

(D3) Naj bo $\alpha \in \mathbb{N}$. Za vsako premico $\ell \in \mathcal{L}$ in točko $P \in \mathcal{P}$, ki ne leži na tej premici, obstaja natanko α premic skozi točko P , ki sekajo premico ℓ .

Očitno je $\alpha \leq \min(s + 1, t + 1)$ in gre za posplošitev aksioma (A3), saj dobimo za $h = 1$ posplošeni četverokotnik. Za $\alpha = s + 1$ dobimo geometrijo poznano pod imenom **2**-($v, \alpha, 1$) *načrt*, pri čemer je $v := |\mathcal{P}|$ (angl. 2-design, tudi Steiner system $S(2, s + 1, ts + 1)$), za $\alpha = s$ *transverzalni načrt* (angl. transversal design $TD(s + 1, t + 1)$), za $\alpha = t$ pa *mrežo* (angl. net). Če je $R = t + 1$, $K = s + 1$ in $T = \alpha$, potem geometrijo z aksiomi (A0)-(A2) in (D3) imenujemo *delna geometrija* s parametri (R, K, T) (angl. partial geometry, in zato oznaka $pg(s, t, \alpha)$). Leta 1963 jo je vpeljal Bose. Iz geometrije lahko skonstruiramo graf na naslednji način. Za vozlišča grafa vzemimo njene točke, različni vozlišči pa sta sosednji, če sta ustrezni točki kolinearni. Dobljeni graf imenujemo *graf kolinearnosti* oz. *točkovni graf*.

Le-ta je *enostaven*, tj. nima zank ali večkratnih povezav. Za osnovne pojme iz teorije grafov glej Vrabec [24], Bajc in Pisanski [4] ter Batagelj, Marušič, Klavžar in Mohar [5].

Za (enostaven) graf na v vozliščih rečemo, da je *krepro regularen* (angl. strongly regular) s parametri (v, k, a, c) , oznaka $\text{SRG}(v, k, a, c)$, če ima vsako vozlišče k sosedov, in imata vsaki dve sosednji vozlišči a skupnih sosedov, vsaki dve nesosednji vozlišči pa c . Za parametre mora veljati $1 \leq c \leq k$ in $0 \leq a \leq k - 1$. Na primer, graf kolinearnosti posplošenega četverokotnika $\text{GQ}(2, 2)$ je $\text{SRG}(15, 6, 1, 3)$. Enako pa velja tudi za poljubno delno geometrijo, glej 8. nalogo.

Naj bo G krepko regularen graf s parametri (v, k, a, c) . Iz $c=0$ sledi, da v grafu G ne obstajata vozlišči na razdalji 2, kar pomeni, da gre za polni graf K_{k+1} (v tem primeru je $a = k - 1$) ali pa unijo takšnih grafov ($G = tK_{k+1}$, $t \geq 2$). V primeru $c \neq 0$ pa je premer grafa G enak 2. Če na dva različna načina preštejemo povezave med sosedi in nesosedi nekega vozlišča, dobimo naslednjo zvezo

$$(v - k - 1)c = k(k - 1 - a),$$

zato se pogosto uporablja tudi oznaka $\text{SRG}(k, a, c)$. Komplement $\overline{G}$ grafa G je prav tako krepko regularen, glej 9. nalogo. Npr. $\overline{tK_n} = K_{t \times n}$, tj. poln t -delen graf, kjer so vsi "deli" (maksimalne neodvisne množice) enake velikosti. To je edini krepko regularni graf s $k = c$, tj. $\text{SRG}(tn, (t-1)n, (t-2)n, (t-1)n)$, za vse druge pa velja $c \leq k - 1$. Nadalje je graf kolinearnosti $\text{GQ}(2, 2)$ komplement trikotniškega grafa $T(6)$ (tj. grafa povezav polnega grafa K_6), ki je $\text{SRG}(15, 8, 4, 4)$.

Več o teh grafih najdete v knjigi *Krepko-regularni grafi*, avtorjev Bruwerja in Van Maldeghema [9]. Npr. za določene parametre je krepko regularen graf celo ekvivalenten delni geometriji, tj. iz njega lahko konstruiramo delno geometrijo. Tak primer so točkovni grafi od $\text{GQ}(q, q^2)$, kjer je q potenca praštevila, glej [9, Izrek 1.3.11], cf. [15, Izrek 5.5].

V primeru posplošenega četverokotnika $\text{GQ}(2, 2)$ pa lahko pridemo do njega tudi tako, da začnemo s Petersenovim grafom, ki je $\text{SRG}(10, 3, 0, 1)$ (glej sliko 13). Slednji je enoličen, tj. do izomorfizma grafov natanko določen s temi parametri (lahka domača naloga). Ima 15 povezav, njegov graf povezav pa ima 15 vozlišč. V grafu povezav povežemo vsa vozlišča, ki so na razdalji 3. Končno nadomestimo vozlišča s točkami, vseh 15 trikotnikov pa s premicami.

6. Lastne vrednosti grafov

Bolj zahtevnim bralcem omenimo še povezavo grafov z linearno algebro. Vozlišča grafa G predstavimo z elementi iz $\mathbb{Z}_{v-1}$. *Matrika sosednosti* $A = A(G)$ je kvadratna matrika z v vrsticami, kjer je $A_{ij} = 1$ ($i, j \in \mathbb{Z}_{v-1}$), če sta vozlišči i in j sosednji in 0 sicer. Spomnimo se, da je število θ lastna vrednost matrike A , če obstaja neničeln vektor $\vec{x} = (x_0, \dots, x_{v-1})^T$, za katerega velja:

$$A\vec{x} = \theta\vec{x}$$

oziroma, če zapišemo i -to komponento (kombinatorično),

$$\sum_{j \sim i} x_j = \theta x_i \quad (0 \leq i < v).$$

Če štejemo komponente vektorja $\vec{x}$ za oznake vozlišč našega grafa, potem nam desna zveza pravi, da je vsota oznak sosedov vozlišča i enaka večkratniku oznake vozlišča i , faktor pa predstavlja lastno vrednost θ . Za lastne vrednosti matrike sosednosti grafa G bomo rekli, da so kar lastne vrednosti grafa G . Za $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ velja:

$$\text{graf } G \text{ je regularen (stopnje } k) \iff \begin{array}{l} \mathbf{1} \text{ je lasten vektor} \\ (\text{z lastno vrednostjo } k). \end{array} \quad (1)$$

V primeru (neusmerjenega) grafa je matrika A simetrična in so zato njene lastne vrednosti realna števila. Za komponento lastnega vektorja x_i , ki je najbolj oddaljena od 0, velja $x_i \neq 0$ (saj je $\vec{x} \neq 0$) in zaradi trikotniške neenakosti tudi

$$\text{stopnja}(i) \geq \sum_{j \sim i} \frac{|x_j|}{|x_i|} \geq \left| \sum_{j \sim i} \frac{x_j}{x_i} \right| = |\theta|. \quad (2)$$

Od tod sledi:

$$\text{Spektralni radij grafa } G \text{ je navzgor omejen z maksimalno stopnjo vozlišča v grafu } G. \quad (3)$$

Naj bo G k -regularen graf in $\theta = k$ v oceni (2). Potem iz (3) sledi, da njeni neenakosti preideta v enakost. Iz prve enakosti (maksimalnost komponente x_i po absolutni vrednosti) sledi $|x_i| = |x_j|$ za vsakega sosedo j vozlišča i , kar pa pomeni, da so tudi oznake sosedov vozlišča i maksimalno oddaljene od 0 v grafu G . Zato tudi $|x_j| = |x_\ell|$ za vsakega sosedo ℓ vozlišča $j, \dots$. Dodajmo še predpostavko, da je graf G povezan. Potem zaključimo $|x_0| = \dots = |x_{v-1}|$. Iz druge enakosti v (2) (ko v trikotniški neenakosti velja enakost) pa sledi,

da morajo imeti vse komponente enak predznak oz. vektorja $\vec{x}$ in $\mathbf{1}$ sta kolinerna. Ker je $\vec{x}$ predstavljal poljuben lasten vektor, smo se prepričali o veljavnosti naslednje trditve:

Večkratnost stopnje k v povezanem k -regularnem grafu je enaka 1. (4)

Za $v \in \mathbb{N}$ naj bo $I = I_v$ identična matrika, $J = I + A(K_v)$, tj. matrika samih enic. Potem za krepko regularen graf G s parametri (v, k, a, c) in $A(\overline{G}) = J - I - A$ velja (glej 11. nalogo):

$$A^2 = kI + aA(G) + cA(\overline{G}) \quad (5)$$

(in je $\{I, A(G), A(\overline{G})\}$ (metrična) asociativna shema, glej Jurišić in Mikla-vič [15]). Relacijo (5) pomnožimo z desne z lastnim vektorjem $\vec{x}$, ki ustreza lastni vrednosti $\theta \neq k$ in je zato pravokoten na $\mathbf{1}$ oz. je v jedru matrike J , nato pa si ogledamo samo komponento, za katero je $x_i \neq 0$ in po deljenju z x_i dobimo:

$$\theta^2 - (a - c)\theta + (c - k) = 0 \quad (6)$$

oziroma, če rešitvi te enačbe označimo s σ in τ ($\sigma > \tau$), po Vietovih pravilih velja

$$\begin{aligned} c &= k + \sigma\tau, & a &= k + \sigma + \tau + \sigma\tau, \\ v &= \frac{(k - \sigma)(k - \tau)}{k + \sigma\tau}, & m_\sigma &= \frac{(\tau + 1)k(k - \tau)}{c(\tau - \sigma)} \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (7)$$

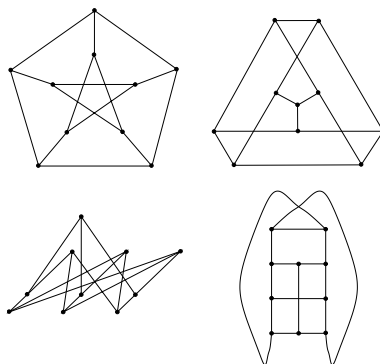
in $m_\tau = v - 1 - m_\sigma$ (za izračun večkratnosti lastnih vrednosti smo uporabili še dejstvo, da je $0 = \text{sled}(A) = k + \tau m_\tau + \sigma m_\sigma$). Celoštevilčnost parametrov krepko regularnega grafa in večkratnosti m_σ precej omeji možnosti za parametre delnih geometrij oz. bolj konkretno posplošenih četverokotnikov. Obstajajo pa še drugi pogoji za obstoj, ki presegajo ta sestavek, glej Brouwer in Van Maldeghem [9, str. 16], cf. [15, Izreka 5.3 in 5.4].

7. Moorovi grafi

Ko smo že omenili grafe, predstavimo bralcu še en pogled na najbolj zanimiv aksiom posplošenega četverokotnika (A3). Dolžini najkrajšega cikla v grafu G pravimo *ožina* (angl. girth) in jo označimo z $g = g(G)$. Sami se prepričajte, da za graf G premera d , ki ni drevo (v tem primeru bi lahko definirali, da je ožina ∞), velja

$$g \leq 2d + 1. \quad (8)$$

Grafe, za katere velja v zgornji neenakosti enakost, imenujemo *Moorovi grafi*. Singleton je pokazal, da je Moorov graf nujno regularen (to je lahko tudi domača naloga za ambiciozne bralce). Poln graf je očitno Moorov. *Kaj pa, če graf ni poln?* Tudi v tem primeru ni težko najti neskončno primerov Moorovih grafov: lihi cikli C_{2d+1} . *Kaj pa če bi radi našli še kakšen primer, ki ni ne poln graf in tudi ne cikel.* Večina bralcev, ki so se že kdaj srečali s teorijo grafov, bi verjetno pomislili na *Petersenov graf*. Le-ta nima ne trikotnikov ne četverkotnikov, njegov premer pa je 2. Ker v tem grafu ni težko najti 5-cikla (C_5), smo prišli do novega primera Moorovega grafa.



Slika 13. Petersenov graf $4 \times$. Lahko ga dobimo tudi iz pravilnega četverca ali tetraedra, tako da dodamo po eno točko na središče vsakega roba in paroma povežemo tiste, ki ustrezajo robovom, ki se ne stikajo.

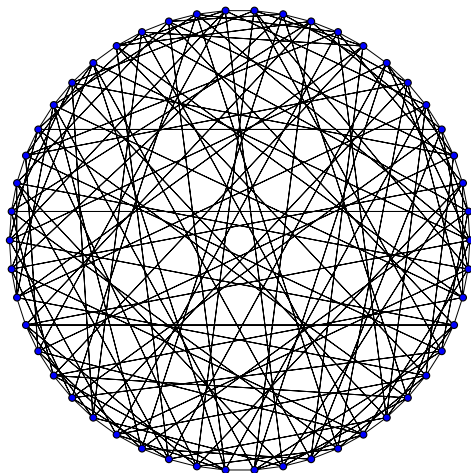
Naslednji primer Moorovega grafa pa ni tako lahko najti, saj ima že 50 vozlišč in stopnjo 7. Vseeno je to uspelo leta 1960 A. Hoffmanu in R. Singletonu. Predstavimo elegantno konstrukcijo N. Robertsona, glej pa tudi sliko 14. Za $j, \ell \in \mathbb{Z}_5$ naj bo P_j petkotnik in Q_ℓ peterokraka (tj. za $i \in \mathbb{Z}_5$ je vozlišče i iz P_j oz. iz Q_ℓ sosednje vozliščema $i \pm 1$ v P_j oz. $i \pm 2$ v Q_ℓ). Sedaj pa dodajmo vsakemu vozlišču še pet povezav: za vse $i, j, \ell \in \mathbb{Z}_5$ povežemo vozlišče i petkotnika P_j z vozliščem $i + j\ell$ peterokrake Q_ℓ . Tudi v tem primeru gre za enoličen krepko regularen graf $\text{SRG}(7, 0, 1)$, cf. Jurišić in Vidali [16], ki sta za dokaz enoličnosti uporabila enoličnost Sylvestrovega grafa, glej sliko 14.

Damerell [12] je za $k \geq 3$ in $d \geq 3$ v Moorovih grafih pokazal, da mora obstajati iracionalna lastna vrednost, ki pa ne more imeti celoštevilčne večkratnosti (cf. Bannai in Ito [3], Biggs [6]), tako da lahko privzamemo $d = 2$ in zaključimo, da je Moorov graf $\text{SRG}(k, 0, 1)$. Z uporabo celoštevilskosti večkratnosti lastnih vrednosti dobimo še $k \in \{2, 3, 7, 57\}$.

Izrek 9. *Edini Moorovi grafi, ki niso polni grafi ali lihi cikli, so Petersenov graf ($k = 3$), Hoffman-Singletonov graf ($k = 7$) in morda še krepko regularni graf na 3250 vozliščih ($k = 57$).*

Obstoj “poslednjega” Moorovega grafa na 3250 vozliščih in stopnjo 57

je odprt problem že več kot 60 let. Jurišić in Vidali [16] sta pokazala, da je obstoj tega grafa ekvivalenten obstoju razdaljno-regularnega grafa premera 3, s presečnim zaporedjem $\{55, 54, 2; 1, 1, 54\}$, $v = 3136$ in spektrom $55^1 7^{1617} - 1^{110} - 8^{1408}$. Za potencialen neobstoj slednjega grafa glej Makhnev [20], vendar tudi Faber in Keegan [13].



Slika 14. Hoffman-Singletonov graf. Konstruirati se ga da tudi iz $\text{GQ}(2, 2)$: za vozlišča vzamemo vse možne pare (oval, razpetje), kjer je oval dual razpetja, glej 4. nalogo, ter sta para (O, S) in (O', S') sosednja natanko tedaj, ko je

$$O \cap O' = \{P\} \in \mathcal{P}, \quad S \cap S' = \ell \in \mathcal{L} \text{ in } P \in \ell;$$

dobimo 5-regularen graf (na 36 vozliščih), premera 3 in ožine 5, v katerem za vsako vozlišče v velja, da vozlišča, ki so na razdalji 2 od v , inducirajo unijo ciklov, vozlišča na razdalji 3 od v pa $5K_2$, ki se imenuje Sylvestrov graf. Iz tega grafa lahko skonstruiramo nov graf na istih vozliščih, tako da povežemo tista vozlišča, ki so v originalnem grafu na razdalji 3. Dobljeni graf je graf kolinearnosti od $\text{GQ}(5, 1)$, tj. $K_6 \times K_6$, ki je tudi $\text{SRG}(10, 1, 2)$. V $\text{GQ}(5, 1)$ imamo 2 razpetji in 12 premic, ki skupaj predstavljajo množico 14 vozlišč. Dodamo jih Sylvestrovemu grafu in tako dobimo 50 vozlišč. Manjkajoče povezave naj za vajo doda bralec sam in nato preveri, če je res dobil pravi graf.

8. Posplošeni n -kotniki

V primeru dvodelnih grafov se da zgornja meja za ožino iz (8) izboljšati v **2d**. Dvodelne grafe, ki dosežejo to mejo, je *Jacques Tits* (leta 1959) je vpeljal in poimenoval *posplošeni večkotniki* oz. *poligoni* (angl. generalized polygons).

Naj bo G dvodelni graf (tj. brez lihih ciklov) in $\mathcal{G} = (\mathcal{P}, \mathcal{L})$ geometrija.

Če vozlišča v enem delu grafa G ustrezajo točkam, vozlišča v drugem delu pa premicam in poljubna točka $P \in \mathcal{P}$ leži na poljubni premici $\ell \in \mathcal{L}$ natanko tedaj, kadar sta P in ℓ sosednji v grafu G , potem rečemo, da je G *incidenčni graf* geometrije $\mathcal{G}$. Ime izhaja iz dejstva, da relaciji $P \in \ell$ rečemo tudi, da sta točka P in premica ℓ *incidenčni*. Geometrijo $\mathcal{G}$, ki jo dobimo iz dvodelnega grafa G premera n , imenujemo *posplošeni n -kotnik*, če velja naslednji aksiom:

(I3) Ožina grafa G je dvakratnik njegovega premera, tj. $2n$.

Zanjo pravimo, da ima *red* (s, t) , kadar velja še

(I1) Vozlišče iz dela $\mathcal{L}$ ima stopnjo $t + 1$.

(I2) Vozlišče iz dela $\mathcal{P}$ ima stopnjo $s + 1$.



Slika 15. Jacques Tits

Za posplošeni n -kotnik rečemo, da je *debel*, če je vsaka točka (premica) incidenčna z vsaj tremi premicami (točkami). Z nekaj dela se lahko prepričamo, da imajo debeli posplošeni n -kotniki vedno red (s, t) za neki naravni števili $s, t \geq 2$. Walter Feit in Graham Higman, ki sta znana po svojem delu na področju klasifikacije enostavnih končnih grup, pa sta leta 1964 dokazala sloviti izrek, glej npr. [7, Thm. 6.5.1]:

Izrek 10. Vsak končni posplošeni n -kotniki, za katerega je $s, t \geq 2$, obstaja le, če je $n \in \{2, 3, 4, 6, 8\}$. Za $n = 2$ je posplošen 2-kotnik poln dvodelen graf $K_{s+1, t+1}$.

Za $n = 3$ dobimo projektivno ravnino in $s = t$,

Za $n = 4$ dobimo posplošen četverokotnik $\text{GQ}(s, t)$, $\sqrt{t} \leq s \leq t^2$.

Za $n = 6$ dobimo posplošen šestkotnik, $\text{GH}(s, t)$, st je popoln kvadrat in $t^{1/3} \leq s \leq t^3$.

Za $n = 8$ dobimo posplošen osemkotnik, $\text{GO}(s, t)$, $2st$ je popoln kvadrat in $\sqrt{t} \leq s \leq t^2$.

Opomba 11. (i) Večino neenakosti v zgornjem izreku je prispeval D.G. Higman. (ii) Za definicijo projektivne ravnine (podobne tisti za posplošene četverokotnike, s katero smo začeli), glej npr. Kiss in Malnič [17].



Slika 16. W. Feit in G. Higman.

Če se omejimo na posplošene četverokotnike s tremi točkami na vsaki premici, tj. $s = 2$, potem obstaja poleg $GQ(2, 1)$ in $GQ(2, 2)$ le še $GQ(2, 4)$. V ta namen bi lahko najprej pokazali Higmanovo neenakost $t \leq s^2$, ki velja v $GQ(s, t)$ za $s > 1$ in $t > 1$ (z nekaj štetja gre le za uporabo neenakosti med kvadratno in aritmetično sredino). V našem primeru to pomeni $t \leq 4$. Iz celoštevilčnosti večkratnosti lastnih vrednosti sledi, da za $GQ(s, t)$ velja tudi $s + t \mid st(s + 1)(t + 1)$, zato je $t \neq 3$ in $GQ(2, 3)$ ne obstaja.

Bi znali iz $GQ(2, 2)$ skonstruirati $GQ(2, 4)$? Slednji četverokotnik mora imeti 27 točk in 45 premic, torej še 12 novih točk in 30 novih premic. Začnimo s kombinatorično konstrukcijo, ki smo jo opisali na začetku 4. razdelka in označimo nove točke z $1, 2, \dots, 6$ in $1', 2', \dots, 6'$. Nove premice naj bodo $\{i, \{i, j\}, j'\}$ za $1 \leq i, j \leq 6$ in $i \neq j$. Bralcu prepustimo preverjanje, da smo res dobili posplošen četverokotnik $GQ(2, 4)$ in omenimo, da je v resnici edini s temi parametri.

Za konec omenimo še, da sta Payne in Thas zgodbo uspešno nadaljevala tudi v primeru $s = 3$, saj mora biti $t \in \{1, 3, 5, 6, 9\}$. Skonstruirala sta posplošen četverokotnik $GQ(3, 3)$ in njegov dual (ki mu ni 'enak'), $GQ(3, 5)$ in $GQ(3, 9)$, ter pokazala, da drugih ni. V primeru $s = 4$ pa je $t \in \{1, 2, 4, 6, 8, 11, 12, 16\}$ in je poznana enoličnost za $GQ(4, 4)$ ter po ena konstrukcija v primerih $GQ(4, 6)$, $GQ(4, 8)$ in $GQ(4, 16)$, medtem ko je obstoj $GQ(4, 11)$ in $GQ(4, 12)$ še vedno odprt problem.

9. Zaključek

Ko uporabimo vse pogoje za obstoj parametrov, običajno dobimo oz. naredimo listo "dopustnih parametrov" (kot smo to videli v majhnih primerih posplošenih četverokotnikov $s \in \{2, 3, 4\}$). Za dobljene parametre ne vemo, ali kombinatorični objekt/geometrija obstaja ali ne. Tudi če konstruiramo en primer geometrije (ali pa ta že obstaja), še vedno ne vemo, ali jih je še več. Dokazi enoličnosti so običajno zahtevni. Včasih se zgodi, da drugih primerov ni, drugič pa jih je lahko celo veliko (v nekaterih primerih na področju krepko regularnih grafov celo eksponentno oz. hiperekspONENTNO mnogo).

Predstavili smo le zelo enostavno neskončno družino posplošenih četverokotnikov, tj. mreže in njihove duale ter primera $GQ(2, 2)$ ter $GQ(2, 4)$ oz. njegov dual¹. Obstajajo številne druge zanimive konstrukcije: $GQ(q, q)$,

¹Predstavimo ga lahko kot 45 točk in 27 premic Hermitske ploskve $\mathcal{U}_{3,4}$ z enačbo

$GQ(q, q^2)$, $GQ(q - 1, q + 1)$, kjer je q potenca praštevila, in njihovi duali. Neskončne družine običajno pridejo iz projektivnih prostorov, katere pogosto konstruiramo iz končnih obsegov (in jim pravimo klasične), vendar ne vedno (te druge včasih smatramo za sporadične). Več o tem področju najdete v knjigah *Končni posplošeni četverokotniki* avtorjev Payne & Thas [21] in *Posplošeni večkotniki* avtorja Van Maldeghama [19].



Slika 17. Hendrik Van Maldeghem Slika 18. Stanley Payne in Joseph A. Thas

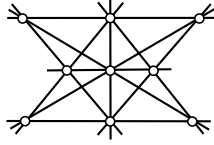
Če ste že pogledali naloge, ste morda ugotovili, da v teh geometrijah lahko iščemo še druge objekte ali strukture, kot npr. razpetja. Razpetja posplošenega četverokotnika $GQ(2, 4)^2$ so npr. lahko izpeljana iz lastnosti kubične ploskve s 27 premicami nad kompleksnimi števili. Avtor [14, str. 45] je v svojem doktoratu (neodvisno) pokazal, da obstajata dve neizomorfni razpetji in ju konstruiral oz. celo narisal, s precej več znanja o končnih geometrijah pa sta ta rezultat prva objavila Brouwer in Wilbrink [10].

Ne nazadnje se lahko v času računalnikov vprašamo, ali bi si lahko pri teh vprašanjih pomagali z njimi. Pri končnih geometrijah in grafih gre za končno število možnosti, torej človek lahko pomisli, da se da pregledati vse možnosti kar z računalnikom ali superračunalnikom in da bomo tako slej ko prej prišli do odgovora. Pa vendar ni tako, saj imamo že za krepko regularne grafe z $v \leq 100$ vozlišč veliko odprtih problemov enoličnosti (najmanjši je $SRG(37, 18, 8, 9)$ s 333 povezavami). Azarija in Marc sta pokazala neobstoj $SRG(75, 32, 10, 16)$ [1] in $SRG(95, 40, 12, 20)$ [2], letos pa sta še Shpectorov in Zhao pokazala neobstoj $SRG(85, 14, 3, 2)$ [22], tako obstaja do $v \leq 100$ še 8 odprtih problemov obstoja (najmanjši je $SRG(69, 20, 7, 5)$ s 690 povezavami, zanimiv pa je tudi $SRG(99, 14, 1, 2)$ s 693 povezavami, glej Conway [11]).

$x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ nad Galoisovim obsegom $GF(4)$. Kot zanimivost omenimo še, da sta teh 27 premic že našla Cayley in Salomon leta 1849.

²Pravzaprav gre za dualno trditev, v kateri nastopajo ovali, glej 4. nalogo.

Svet brez trikotnikov



Slika 19. Rešitev naloge iz uvoda.

Naloge

1. Naj bo $\mathcal{G}$ posplošeni četrkotnik $\text{GQ}(1, t)$. Glede na to, da vsako premico sestavljata dve točki, jo štejemo za povezavo. Prepričajte se, da je $\mathcal{G}$ poln dvodelni graf $K_{t+1, t+1}$.
2. Dokaži točko (b) iz Leme 3.
3. Koliko četrkotnikov, petkotnikov in (3×3) -mrež je v $\text{GQ}(2, 2)$?
4. *Oval* $\mathcal{O}$ je dual razpetja, tj. taka podmnožica točk, da vsaka premica vsebuje natanko eno točko iz $\mathcal{O}$. Glej npr. Kiss in Malnič [18] za primer projektivne ravnine (ko je $n = 3$). Opomba: obstoj ovala v $\text{GQ}(s, t)$ ni zagotovljen, tako kot ne v primeru razpetja, sta pa zato njuni velikosti enaki $st + 1$. Koliko razpetij oziroma ovalov je v $\text{GQ}(2, 2)$?
5. V kombinatorični konstrukciji $\text{GQ}(2, 2)$, kjer so bile stranice polnega grafa K_6 točke, je oval množica 5 točk, ki ustrezajo povezavam iz enega vozlišča. Dokaži, da mora biti oval vedno množica, ki jo dobimo na tak način.
6. S 15 pari elementov iz množice $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ označite še geometrijo na sliki 8, tako da bodo premice res ustrezale razbitjem množice V . (Ker je grupa simetrij za $\text{GQ}(2, 2)$ velika, to ne bo preveč težko. Pa bi znali morda določiti tudi to grupo?)
7. Dokaži, da je dual delne geometrije tudi delna geometrija in določi njene parametre.
8. Pokaži, da je točkovni graf delne geometrije s parametri (R, K, T) krepko regularen ter določi njegove parametre in lastne vrednosti.
9. Naj bo G krepko regularen graf $\text{SRG}(v, k, a, c)$. Dokaži, da je komplement $\overline{G}$ tudi krepko regularen graf in določi njegove parametre ter lastne vrednosti.
10. Iz Robertsonove konstrukcije je razvidno, da lahko vozlišča tega grafa razdelimo na dve polovici tako, da vsaka inducira $5C_5$. Prepričaj se, da unija vsakega petkotnika in petokrake inducira Petersenov graf (kar

pomeni, da graf nima trikotnikov) in da v tem grafu ni četverokotnikov ima pa premer 2. Od tod sledi, da gre za $\text{SRG}(7, 0, 1)$.³

11. Naj bo $v \in \mathbb{N}$, G pa graf z množico vozlišč $\mathbb{Z}_v$ in A njegova matrika sosednosti. Z matematično indukcijo se prepričaj, da je za $i, j \in \mathbb{Z}$ in za poljubno naravno število h

$$(A^h)_{ij} = \text{število sprehodov med vozlišči } i \text{ in } j \text{ dolžine } h.$$

12. Naj bo G graf premera d . Dokaži, da ima vsaj $d + 1$ različnih lastnih vrednosti.
13. (k, g) -kletka je regularen graf stopnje k in ožine g ter minimalnega števila vozlišč $v = v(k, g)$. Problem določanja števila $v(k, g)$ je leta 1959 postavil F. Kármányi, ki je opazil, da je število $v(3, 5) = 10$ ter "realizirano" s Petersenovim grafom. Določi $v(2, g)$, $v(k, 3)$, $v(k, 4)$ in $v(7, 5)$.
14. Za potenco praštevila q se da iz končnega obsega $\text{GF}(q)$, glej Tonajc [23], konstruirati posplošeni n -kotnik za

(a) $n = 3$ – projektivna ravnina $\text{PG}(2, q)$,

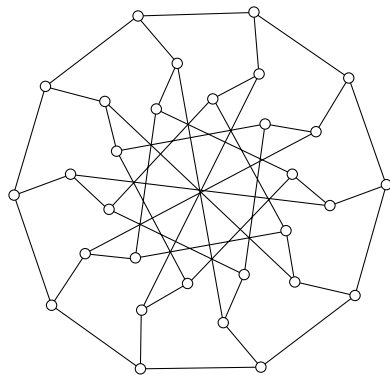
(b) $n = 4$ – posplošen štirikotnik $\text{GQ}(q, q)$, za $q = 2$ glej sl. 19,

(c) $n = 6$ – posplošen šestkotnik $\text{GH}(q, q)$,

katerega incidenčni graf je k -regularen, pri čemer je $k = q + 1$.

Prepričaj se, da je ta graf (k, n) -kletka in

(a) $v(k, 6) = 2(q^2 + q + 1)$, (b) $v(k, 8) = 2(q + 1)(q^2 + 1)$, (c) $v(k, 12) = 2(q + 1)(q^4 + q^2 + 1)$.

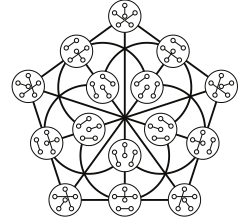


Slika 20. Tuttova $(3, 8)$ -kletka

³Kot zanimivost omenimo še, da ima Hoffman-Singletonov graf natanko 100 neodvisnih podmnožic vozlišč velikosti 15. Vsaka neodvisna podmnožica je disjunktna z natanko 7 drugimi neodvisnimi podmnožicami. Graf na 100 vozliščih, ki povezuje disjunktne neodvisne množice in pa tiste, ki se sekajo v 8 vozliščih, lahko razdelimo na dva podgrafa s 50 vozlišči, od katerih je vsak izomorfen Hoffman-Singletonovemu grafu. Gre za Higman-Simsov graf, ki je $\text{SRG}(22, 0, 6)$ in prav tako enoličen. Lahko bi nadaljevali in našli povezavo z Matejevo grupo M_{22} (Mathieu) in Wittovim načrtom ali pa Leechevo mrežo itd.

15. Na sliki 21 (z naslovnice) je predstavljen $GQ(2, 2)$ še v eni obliki. Pojasni, za kaj gre.

Rešitev. Ker je ta posplošeni četverokotnik sam sebi dualen, smo v tabeli 1 zamenjali vlogo točk in premic, tako da so tokrat točke prirejanja, prirejanja pa sestavljajo premico, kadar je presek treh prirejanj povezava v K_6 . Opozorimo še, da je K_6 narisano tako, da najprej narišemo K_5 , potem pa v sredino postavimo šesto točko, ki jo povežemo s petimi točkami, s katerimi smo začeli.



Slika 21. $GQ(2, 2)$ še enkrat, v nekoliko drugačni obliki.

16. Konstruiraj $SRG(9, 4, 1, 2)$ in dokaži njegovo enoličnost.⁴ Nadaljujmo s poljubnimi grafom, za katerega velja, da poljubna njegova povezava leži v natanko enem trikotniku ($a = 1$) in poljubni dve nesosednji vozlišči ležita v natanko enem četverokotniku ($c = 2$). Dokaži, da mora biti ta graf regularen. Potem gre za krepko regularen graf $SRG(k, 1, 2)$, iz (6) in (7) pa sledi še $k \in \{4, 14, 22, 112, 994\}$. Za $k = 14$ glej [11], za $k = 22$ pa obstaja graf, ki so ga l. 1971 konstruirali Berlekamp, Van Lint in Seidel iz ternarne Golayeve kode, cf [9, str. 333].

Iz 12. naloge sledi, da je graf z eno samo lastno vrednostjo K_1 , graf z dvema lastnima vrednostima pa K_n , $n > 1$. Grafi z največ tremi lastnimi vrednostmi so krepko regularni. V splošnem imajo razdaljno-regularni grafi (glej Brouwer, Cohen in Neumaier [7], cf. [14], [15]) premera d natanko $d + 1$ lastnih vrednosti, obrat pa ne velja. Tem grafom se bomo posvetili v posebnem članku. Lahko pa omenimo, da se je za enoličnost Pattersonovega grafa kot razdaljno-regularnega grafa s parametri $\{280, 243, 144, 10; 1, 8, 90, 280\}$ uporabila enoličnost posplošenega četverokotnika $GQ(3, 9)$, glej Brouwer, Jurišić in Koolen [8]. Ta graf ima za vozlišča 22 880 centrov Sylowih 3-grup Suzukijeve grupe, kjer sta vozlišči sosednji takrat, ko generirata Abelovo grupo reda 3^2 . Dobljeni graf je primitiven, ima premer 4 in stopnjo 280.

Zahvala Mojci Mikac, s katero sva pred mnogimi leti začela študirati enoličnost posplošenega četverokotnika $GQ(2, 2)$, in recenzentoma za koristne pripombe.

LITERATURA

- [1] J. Azarija in T. Marc, There is no $(75, 32, 10, 16)$ strongly regular graph, *Lin. Alg. and its Appl.* **557** (2018), 62–83.

⁴Izkaže se, da gre za graf kolinearnosti posplošenega četverokotnika $GQ(2, 1)$.

- [2] J. Azarija in T. Marc, There is no $(95, 40, 12, 20)$ strongly regular graph, *J. Combin. Designs* **28** (2020), 294–306.
- [3] E. Bannai in T. Ito, (1973), On finite Moore graphs, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* **20** (1973), str. 191–208.
- [4] D. Bajc in T. Pisanski, Najnужnejše o grafih, *Presek* **12/6** (1985).
- [5] V. Batagelj, Ovojnica vrednostne matrike, D. Marušić, Sedem posebnježev, S. Klavžar, Grafi intervalov, B. Mohar, Ravninski grafi, *Obzornik mat. fiz.* **37/4** (1990).
- [6] N.L. Biggs, Algebraic Graph Theory, in: *Cambridge Tracts in Mathematics* **67**, Cambridge University Press, London, 1974.
- [7] A.E. Brouwer, A.M. Cohen in A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*. Springer, New York, 1989.
- [8] A.E. Brouwer, A. Jurišić in J. Koolen, Characterization of the Patterson graph, *J. Algebra* **320** (2008), str. 1878–1886.
- [9] A.E. Brouwer in H. Van Maldeghem, Strongly regular graphs, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* **182**, Cambridge University Press, 2022.
- [10] A.E. Brouwer in H.A. Wilbrink, Ovoids and fans in the generalized quadrangle $GQ(4, 2)$, *Geom. Dedicata* **36** (1990), str. 121–124.
- [11] J. H. Conway, Conway’s 99-graph problem, https://en.wikipedia.org/wiki/Conway%27s_99-graph_problem
- [12] R.M. Damerell, On Moore graphs, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **74** (1973), str. 227–236.
- [13] V. Faber in J. Keegan, The existence of a Moore graph of degree 57 is still open, arxiv.org/pdf/2210.09577, revision: 27. februar, 2023.
- [14] A. Jurišić, Antipodni krovi, doktorska disertacija, Univerza v Waterlooju, Kanada, 1995. 1krv.fri.uni-lj.si/~ajurismic/teza.pdf
- [15] A. Jurišić in Š. Miklavič, Asociativne sheme, *Obzornik mat. fiz.* **50/3** (2003), str. 65–81.
- [16] A. Jurišić in J. Vidali, The Sylvester graph and Moore graphs, *European J. Combin.* **80** (2019), str. 184–193.
- [17] G. Kiss in A. Malnič, Končne projektivne ravnine, *Obzornik mat. fiz.* **47/5** (2000), str. 161–169.
- [18] G. Kiss in A. Malnič, Ovali v končnih projektivnih ravninah, *Obzornik mat. fiz.* **47/6** (2000), str. 129–134.
- [19] H. Van Maldeghem, *Generalized Polygons*, Springer Science & Business Media, 1998.
- [20] A.A. Makhnev, Moore graph with parameters $(3250, 57, 0, 1)$ does not exist, (v ruščini, angleški povzetek), [arXiv:2010.13443v2](https://arxiv.org/abs/2010.13443v2) [math.CO], Nov. 9, 2020.
- [21] S.E. Payne in J.A. Thas, *Finite generalized quadrangles*, Pitman, London, 1984.
- [22] S. Shpectorov in T. Zhao, Strongly regular graphs with parameters $(85, 14, 3, 2)$ do not exist, [arXiv:2504.02449](https://arxiv.org/abs/2504.02449), Apr. 3, 2025
- [23] J. Tonejc, Aritmetika dvojiških končnih obsegov, *Obzornik mat. fiz.* **57/5** (2010), str. 157–175.
- [24] J. Vrabec, Prikaz teorije grafov I, II, *Obzornik mat. fiz.* **14/2** (1967), str. 58–71 in **14/3-4** (1967), str. 107–120.

O ALBEDIH

VID KAVČIČ¹

¹Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

Ključne besede: albedo, navidezni sij, fazna funkcija

V članku obravnavamo pojem albeda, ki opisuje delež odbite svetlobe nebesnih teles. Najprej predstavimo dve definiciji: Bondov albedo, ki meri skupni delež odbitega sevanja, in geometrijski albedo, ki izhaja iz primerjave z idealno Lambertovo površino. Nato izpeljemo matematično zvezo med obema definicijama, pri čemer se izkaže, da sta povezani preko fazne funkcije in faznega integrala. V nadaljevanju se osredotočimo na vlogo albeda pri določanju navideznega sija planetov in Lune. Posebej obravnavamo primer Lune, pri čemer uporabimo model Lambertove sfere za izračun svetlosti polne Lune in prvega krajca. Rezultati pokažejo, da se izračunane vrednosti razlikujejo od izmerjenih, saj Lunina površina ne odraža idealnega Lambertovega obnašanja. Pri opazovanjih pride do opozicijskega učinka, ko se svetlost Lune blizu polne faze izrazito poveča. Učinek povzročata izginotje senc in koherentno povratno sipanje. V članku se tako osredotočimo na pomen faznih funkcij pri razumevanju opazovane svetlosti nebesnih teles.

ON ALBEDOS

This article discusses the concept of albedo, which quantifies the fraction of reflected light from celestial bodies. We first present two definitions: the Bond albedo, measuring the total fraction of reflected radiation, and the geometric albedo, defined through comparison with an ideal Lambert surface. A mathematical relation between the two is derived, showing that they are linked through the phase function and the phase integral. We then examine the role of albedo in determining the apparent brightness of planets and the Moon. Special attention is given to the case of the Moon, where a Lambert sphere model is applied to calculate the brightness of the full Moon and the first quarter. The results reveal deviations from observations, since the lunar surface does not behave as a perfect Lambert reflector. Observations show a pronounced opposition effect near full Moon, caused by the disappearance of shadows and coherent backscattering. The article thus emphasizes the importance of phase functions for understanding the observed brightness of celestial objects.

1. Uvod

Planeti, lune in druga mala telesa v Osončju nimajo lastnega izvora sevanja, temveč del Sončeve svetlobe odbijejo, del pa absorbirajo in nato izsevajo. Svetlost telesa je odvisna od njegove oddaljenosti od Sonca, položaja v Osončju glede na Zemljo in od albeda njegovega površja. S pojmom albedo, ki izhaja iz latinščine in pomeni *belina*, opišemo zmožnost telesa, da odbije vpadno svetlobo.

V članku bomo najprej obravnavali različni definiciji albeda in povezavo med njima, nato pa s tem v zvezi proučili dejavnike, ki vplivajo na navidezni

sij planetov in Lune. V sklepnem delu se bomo dotaknili še navideznega sija polne Lune in prvega krajca ter primerjave z izmerjenimi vrednostmi.

2. Dve definiciji albeda

2.1 Bondov albedo

V astronomiji poznamo dve različni definiciji albeda, in sicer Bondov albedo in geometrijski albedo. Ko govorimo o albedu in posebej ne poudarimo, katero vrsto albeda imamo v mislih, navadno mislimo na Bondov albedo. **Bondov albedo** A (tudi *sferični*, *planetarni* ali *bolometrični* albedo) definiramo kot delež odbitega sevanja. Izrazimo ga kot

$$A = \frac{P_{\text{od}}}{P_{\text{vp}}}, \quad (1)$$

kjer je P_{od} odbiti svetlobni tok in P_{vp} vpadni svetlobni tok. Iz definicije je jasno, da lahko Bondov albedo zavzame vrednosti med 0 (črno telo) in 1 (zrcalo, belo telo). Ta vrsta albeda se imenuje po ameriškem astronomu **Georgeu Phillipsu Bondu**, ki je mimogrede razen po definiciji albeda poznan tudi po prvi fotografiji zvezde (Vega) leta 1850 in dvozvezdja (Mizar) leta 1857 [1].

Zamislimo si krogelni planet z Bondovim albedom A in s polmerom R , ki se nahaja na razdalji r od Sonca. Potem lahko odbiti energijski tok P_{od} izrazimo kot

$$P_{\text{od}} = AP_{\text{vp}} = A \cdot \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} \cdot \pi R^2 = \frac{AL_{\odot}R^2}{4r^2}, \quad (2)$$

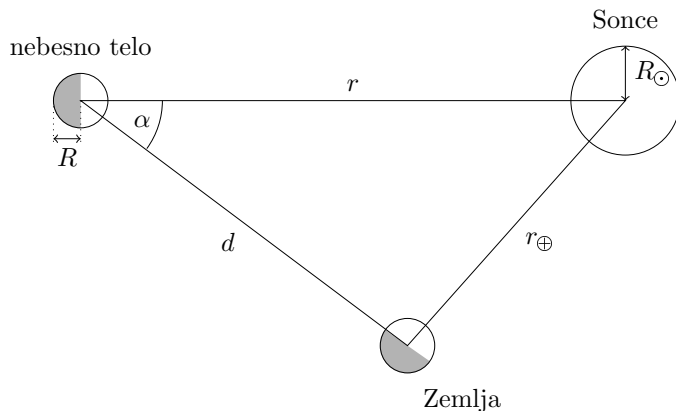
kjer smo z $L_{\odot}$ označili Sončev izsev.

Svetlost telesa na našem nebu ni odvisna samo od odbitega energijskega toka, pač pa tudi od medsebojne lege Zemlje, Sonca in telesa. Svetloba se namreč ne odbije izotropno v vse smeri.

Medsebojno lego Zemlje, Sonca in telesa opišemo s **faznim kotom** (α). To je kot med zveznicama Zemlja–telo in Sonce–telo. Definicija faznega kota je grafično predstavljena na sliki 1. Če se telo nahaja na razdalji d od Zemlje, potem gostoto svetlobnega toka j , ki jo izmerimo na Zemlji, izrazimo kot

$$j = C\Phi(\alpha) \frac{P_{\text{od}}}{4\pi d^2}, \quad (3)$$

kjer sta C **normalizacijska konstanta** in Φ **fazna funkcija**, ki opisuje to fazno odvisnost. Pri tem naj velja, da je $\Phi(0) = 1$ [3]. S tem lahko fazna funkcija doseže vrednosti vse od 0 pa do 1.



Slika 1. Skica za definicijo količin. Obravnavano nebesno telo s polmerom R se nahaja na razdalji d od Zemlje in na razdalji r od Sonca. Fazni kot nebesnega telesa je α . Oddaljenost Zemlje od Sonca smo označili z $r_{\oplus}$, polmer Sonca pa z $R_{\odot}$.

2.2 Geometrijski albedo

Preden definiramo geometrijski albedo, moramo pojasniti pojem Lambertove površine. To je popolnoma bela površina, ki odbije vso vpadno sevanje ($A = 1$), in je videti v vseh smereh enako svetla. Slednje pogosto imenujemo **Lambertov zakon** in velja za večino hrapavih ravnih svetil.

Namesto da govorimo o svetlosti površine, lahko Lambertov zakon zapišemo tudi s *svetilnostjo* I površine, ki v nasprotju s svetlostjo ne vključuje popravka zaradi projekcije dela površine telesa na pravokotno ravnino. Če z α označimo kot med pravokotnico na površino in smerjo pogleda, lahko Lambertov zakon za svetilnost v odvisnosti od smeri pogleda zapišemo kot

$$I(\alpha) = I_0 \cos \alpha, \quad (4)$$

kjer je α kot med pravokotnico in smerjo pogleda ter I_0 svetilnost v pravokotni smeri. S tem v zvezi lahko fazno funkcijo za ravno Lambertovo površino zapišemo kot

$$\Phi(\alpha) = \begin{cases} \cos \alpha, & \text{če je } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{sicer.} \end{cases} \quad (5)$$

V vsakdanjem življenju do te mere popolna površina seveda ne obstaja, vendar pa obstajajo materiali, ki se obnašajo skoraj tako kot Lambertova površina. Stena z belim mat zaključkom je kar dober približek zanjo; čeprav ne odbije vse vpadne svetlobe, je porazdelitev odbite svetlobe približno enakomerna, njena svetlost pa je v vseh smereh enaka. [5].

2.3 Geometrijski albedo

Pri definiciji geometrijskega albeda izkoristimo primerjavo telesa z ravno Lambertovo površino. **Geometrijski** (tudi *fizični*) **albedo** p je razmerje med gostoto svetlobnega toka, ki ga pri faznem kotu $\alpha = 0$ odbije dano telo, in gostoto svetlobnega kota, ki ga pri istem faznem kotu odbije Lambertova površina z enakim prečnim presekom. Za Lambertovo površino je geometrijski albedo torej enak $p_{\text{Lambert}} = 1$.

Geometrijski albedo je torej odvisen tako od odbojnosti površja kot tudi od fazne funkcije Φ telesa. Veliko hrapavih površin odbije večino vpadne svetlobe naravnost nazaj. V tem primeru je geometrijski albedo p večji kot v primeru izotropno odbojne površine. Primer takega površja je tudi površje naše Lune, kar bomo podrobneje proučili v nadaljevanju. Ni torej nepomembno poudariti, da za nekatera telesa velja $p > 1$. Najsrajnejši primer tega je zrcalo, za katerega velja odbojni zakon, kar pomeni, da je $p = \infty$. Vrednosti geometrijskega albeda za telesa v našem Osončju se večinoma nahajajo med 0,03 in 1. Geometrijski albedo Lune je $p = 0,12$, največja vrednost geometrijskega albeda pa je bila izmerjena za Saturnovo luno Enkelad, in sicer $p = 1,38$.

Vrednosti Bondovega in geometrijskega albeda se očitno med seboj razlikujeta. Za ilustracijo je v tabeli 1 predstavljena primerjava Bondovega in geometrijskega albeda za nekatera telesa v Osončju. Ko v poljudni literaturi zasledimo besedo albedo brez pojasnila, za katero vrsto gre, navadno mislimo na Bondov albedo. Naravna razloga za to sta očiten fizikalni pomen kot tudi dejstvo, da je Bondov albedo normiran na intervalu $[0, 1]$.

Izkaže se, da lahko vrednost geometrijskega albeda za posamezni planet določimo iz opazovanj, Bondov albedo pa lahko določimo le, če poznamo fazno funkcijo Φ . Na težavo naletimo že pri zunanjih planetih, ki jih lahko opazujemo le na določenem intervalu faznih kotov. Zaradi tega fazne funkcije Φ zanje prav natančno ne poznamo, s tem pa tudi Bondovega albeda ne moremo natančno določiti.

nebesno telo	Bondov albedo	geometrijski albedo
Merkur	0,09	0,14
Venera	0,76	0,69
Zemlja	0,31	0,43
Luna	0,11	0,12
Mars	0,25	0,17

Tabela 1. Primerjava Bondovega in geometrijskega albeda za nekaj teles Osončja [7]. Bondov albedo je lahko večji ali manjši od geometrijskega albeda. Razlika je odvisna od površine in lastnosti atmosfere telesa. Podatki se zaradi različnih meritev v različnih virih med seboj razlikujejo.

3. Zveza med Bondovim in geometrijskim albedom

Pri vsakem zainteresiranem bralcu se hitro pojavi naravno vprašanje, ali sta ti, na videz popolnoma različni definiciji albeda, morda kljub vsemu nekako povezani.

Spomnimo se, da smo gostoto svetlobnega toka j , ki jo izmerimo na Zemlji, v enačbi (3) povezali z odbitim svetlobnim tokom P_{od} , oddaljenostjo d telesa od Zemlje in s fazno funkcijo $\Phi(\alpha)$. Odbiti svetlobni tok lahko izrazimo z integralom po sferi s polmerom d . Velja

$$\int_S C \Phi(\alpha) \frac{P_{\text{od}}}{4\pi d^2} dS = P_{\text{od}},$$

iz česar nemudoma sledi

$$\frac{C}{4\pi d^2} \int_S \Phi(\alpha) dS = 1. \quad (6)$$

V primeru točkastega svetila je integral na levi strani zgornje enačbe tri-vialen, v našem primeru pa moramo upoštevati še fazno odvisnost. Če površinski element dS sfere izrazimo kot

$$dS = d^2 \sin \alpha d\alpha d\varphi,$$

lahko razpišemo

$$\int_S \Phi(\alpha) dS = d^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha d\alpha d\varphi = 2\pi d^2 \int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha d\alpha.$$

To pomeni, da lahko iz enačbe (6) normalizacijsko konstanto izrazimo kot

$$C = \frac{2}{\int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha d\alpha}.$$

Ker poznamo fazno funkcijo za Lambertovo površino (enačba (5)), lahko izračunamo normalizacijsko konstanto C_L za Lambertovo površino. Velja

$$\int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha d\alpha = \int_0^{\pi/2} \cos \alpha \sin \alpha d\alpha = \frac{1}{2}, \quad (7)$$

kar pomeni, da je normalizacijska konstanta enaka $C_L = 4$. Zdaj imamo vse, kar potrebujemo, da geometrijski albedo preko gole definicije povežemo z Bondovim albedom.

Iz enačb (2) in (3) izrazimo gostoto odbitega svetlobnega toka j , ki jo izmerimo na Zemlji v primeru, ko je $\alpha = 0$ oziroma $\Phi(\alpha) = 1$. Velja

$$j = \frac{CA}{4\pi d^2} \frac{L_{\odot} R^2}{r^2}. \quad (8)$$

Podobno izrazimo še gostoto svetlobnega toka j_L pripadajoče Lambertove površine, pri čemer upoštevamo, da je Bondov albedo Lambertove površine po definiciji $A_L = 1$, normalizacijska konstanta pa $C_L = 4$. Sledi

$$j_L = \frac{4}{4\pi d^2} \frac{L_{\odot} R^2}{r^2}. \quad (9)$$

V kvocientu enačb (8) in (9) prepoznamo definicijo geometrijskega albeda. Izpeljali smo torej, da geometrijski albedo in Bondov albedo povezuje enačba

$$p = \frac{CA}{4}. \quad (10)$$

V enačbi normalizacijsko konstanto C pogosto nadomestimo z izrazom (6). V tem primeru lahko Bondov albedo izrazimo v obliki

$$A = pq, \quad (11)$$

kjer smo uvedli **fazni integral**

$$q = 2 \int_0^{\pi} \Phi(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha. \quad (12)$$

Končna zveza med Bondovim in geometrijskim albedom je videti posebej preprosta – loči ju samo en faktor, ki smo ga definirali kot fazni integral. V njem je kompaktno zajet učinek na izmerjeno gostoto svetlobnega toka, ki je posledica faze oziroma fazne funkcije, slednja pa je posebej značilna za vsako telo v Osončju [3].

4. Navidezni sij telesa v Osončju

Od albeda je odvisen tudi navidezni sij telesa v Osončju, denimo planeta ali Lune. Izpeljimo splošni izraz za navidezni sij telesa. Iz enačb (8) in (10) neposredno sledi zapis

$$j = \frac{p}{\pi} \Phi(\alpha) \frac{1}{d^2} \frac{R^2}{4r^2} L_{\odot}. \quad (13)$$

Če solarno konstanto izrazimo kot

$$j_{\odot} = \frac{L_{\odot}}{4\pi a^2},$$

za razmerje gostot svetlobnih tokov dobimo

$$\frac{j}{j_{\odot}} = \frac{pR^2a^2}{d^2r^2}\Phi(\alpha).$$

Ker navidezni sij Sonca na razdalji $a = 1$ a. e. ustreza $m_{\odot} = -26,7$, lahko iz Pogsonove enačbe

$$m - m_{\odot} = -2,5 \log \frac{j}{j_{\odot}} \quad (14)$$

z nekaj matematične telovadbe izraz za navidezni sij m telesa preoblikujemo v

$$m = m_{\odot} - 2,5 \log p \frac{R^2}{a^2} + 5 \log \frac{dr}{a^2} - 2,5 \log \Phi(\alpha). \quad (15)$$

Izraz za navidezni sij smo prikladno zapisali kot vsoto več različnih prispevkov. Prvi člen je konstanten, drugi člen pa je odvisen samo od velikosti planeta in odbojnih lastnosti njegovega površja ter je s tem značilen za posamezen planet oziroma drugo telo v Osončju. Tretji člen vsebuje odvisnost od razdalje, četrti pa odvisnost od faznega kota [3].

Razvito orodje lahko najprej uporabimo za izračun navideznega sija naše Lune, ki je povsem naravna kandidatka takšno početje. Hitro nas zaskrbi, da je največja neznanka v enačbi (15) pravzaprav le fazna funkcija. Fazno funkcijo za različna telesa v Osončju astronomi določijo na podlagi meritev in z modeliranjem. V teoretskem smislu jo je skoraj nemogoče določiti, saj je v veliki meri odvisna od značilnosti površja in oblike telesa.

V nadaljevanju bomo zato najprej izpeljali fazno funkcijo za najpreprostejše krogelno telo, ki si ga lahko zamislimo – to je za kroglo z Lambertovo površino. Nato bomo na podlagi dobljenega rezultata izračunali navidezni sij polne Lune in prvega krajca.

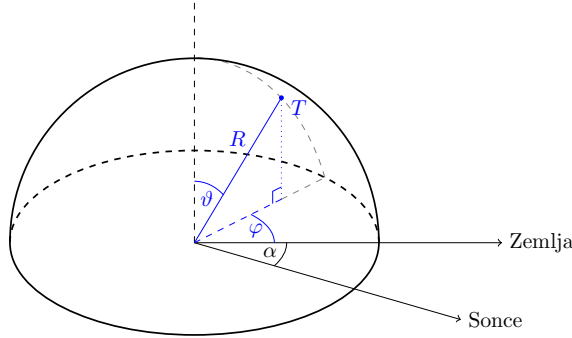
5. Fazna funkcija Lambertove sfere

V razdelku o definicijah albeda smo pri definiciji geometrijskega albeda zapisali fazno funkcijo za ravno Lambertovo površje (enačba (5)). Če želimo ob predpostavki Lambertovega površja obravnavati navidezni sij Lune v različnih menah, moramo izpeljati fazno funkcijo za Lambertovo kroglo.

Označimo z R polmer Lune. Definiramo polarni kot ϑ , azimutalni kot φ in fazni kot α (kot Zemlja–Luna–Sonce), kot to prikazuje slika 2.

Obravnavajmo majhen košček Luninega površja, ki ga omejujejo koordinate φ in $\varphi + d\varphi$ ter ϑ in $\vartheta + d\vartheta$. Za svetlobni tok dP_{vp} , ki s Sonca vpada na tak košček, velja

$$dP_{vp} = j_{\odot} R^2 \cos^2 \vartheta \cos(\varphi + \alpha) d\vartheta d\varphi,$$



Slika 2. Položaj točke T na površju Lune opišemo s sfernim koordinatama ϑ in φ ter s polmerom R . Fazni kot α je kot med zveznicama Zemlja–Luna in Luna–Sonce.

kjer je $j_{\odot}$ solarna konstanta, $R^2 \cos^2 \vartheta d\vartheta d\varphi$ pa projekcija površine koščka. Bondov albedo Lambertove površine je po definiciji enak 1. To pomeni, da za svetlobni tok dP_{od} , ki ga tak košček odbije izotropno v vse smeri, velja

$$dP_{\text{od}} = I_0 \pi R^2 \cos \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (16)$$

kjer smo z

$$I_0 = \frac{j_{\odot} \cos \vartheta \cos(\varphi + \alpha)}{\pi} \quad (17)$$

označili svetilnost v pravokotni smeri. Krajši račun pokaže, da je celoten svetlobni tok P^* , ki ga odbije ravna Lambertova površina, enak

$$P^* = \pi I_0. \quad (18)$$

Skupaj z Lambertovim zakonom to pomeni, da je delež odbitega svetlobnega toka, ki se odbije v smeri proti Zemlji, enak

$$dP = dP_{\text{od}} \cos \beta \frac{d\Omega}{\pi}, \quad (19)$$

kjer je β kot med smerjo proti Zemlji in normalo na površino koščka, $d\Omega$ pa prostorski kot, v katerega se odbija svetloba. Svetlobni dP se na površju Zemlje razporedi po površini $dS = d^2 d\Omega$, kjer je d razdalja med Luno in Zemljo. Hitro vidimo, da velja tudi $\cos \beta = \cos \vartheta \cos \varphi$. S tem lahko svetlobni tok izrazimo kot

$$dP = \frac{j_{\odot} R^2 dS}{\pi d^2} \cos^3 \vartheta \cos \varphi \cos(\varphi + \alpha) d\vartheta d\varphi.$$

Gostota svetlobnega toka j , ki jo izmerimo na Zemlji, je potemtakem

$$j = \frac{j_{\odot} R^2}{\pi d^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \vartheta d\vartheta \int_{-\pi/2}^{\pi/2-\alpha} \cos \varphi \cos(\varphi + \alpha) d\varphi, \quad (20)$$

kjer smo z mejami integralov poskrbeli, da upoštevamo samo osvetljene dele Luninega površja. Rešitev prvega integrala je

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \vartheta \, d\vartheta = \frac{4}{3}, \quad (21)$$

drugi integral pa lahko prepišemo v

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2-\alpha} \cos \varphi \cos(\varphi + \alpha) \, d\varphi = \frac{1}{2} [(\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha]. \quad (22)$$

S tem lahko lahko gostoto svetlobnega toka j izrazimo kot

$$j = C\Phi(\alpha) \frac{R^2}{d^2} j_{\odot}, \quad (23)$$

kjer je

$$\Phi(\alpha) = \frac{1}{\pi} [(\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha] \quad (24)$$

iskana fazna funkcija za Lambertovo sfero in $C = 2/3$ pripadajoča normalizacijska konstanta [2, 4].

6. Navidezni sij Lune

Med astronomi je splošno znano, da je navidezni sij polne Lune okoli $-12,7$ magnitude. Za primerjavo, navidezni sij Sonca znaša $m_{\odot} = -26,7$, kar po Pogsonovi enačbi pomeni, da je Sonce na našem nebu videti okoli $10^{0,4 \cdot (-12,7 - (-26,7))} \simeq 400000$ -krat svetlejšo od polne Lune.

S fazno funkcijo (24) za Lambertovo sfero in z enačbo (15) lahko izračunamo navidezni sij Lune v različnih menah. Poskusimo najprej izračunati navidezni sij polne Lune, če bi Luno prekrivala Lambertova površina.

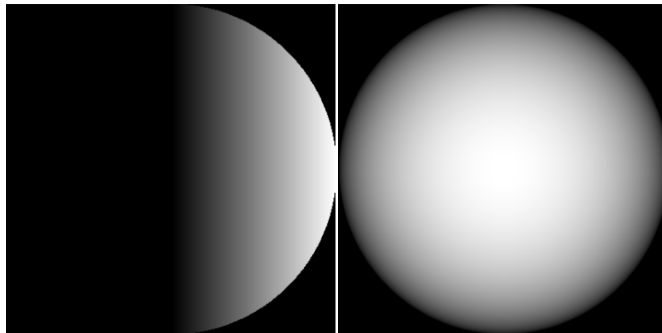
V tem primeru je $\alpha = 0$ in s tem $\Phi(\alpha) = 1$. Ker je normalizacijska konstanta za Lambertovo sfero enaka $C = 2/3$ in je Bondov albedo za Lambertovo sfero enak $A = 1$, iz enačbe 10 sledi, da je geometrijski albedo za Lambertovo sfero enak $p = 1/6$.

Upoštevamo še, da je polmer Lune $R_L = 1740$ km, srednja oddaljenost Lune od Zemlje $d_L = 384\,000$ km in da sta oddaljenosti Lune in Zemlje od Sonca približno enaki, torej, da velja $r \simeq a = 1,5 \cdot 10^{11}$ m. V tem primeru se enačba (15) poenostavi v

$$m = m_{\odot} - 2,5 \log p \frac{R^2}{a^2} + 5 \log \frac{d}{a} = -13,0. \quad (25)$$

Izračunali smo torej, da je polna Luna v tem modelu nekoliko svetlejša kot v resnici. Odstopanje ni nepričakovano, saj smo upoštevali, da je Bondov albedo Lune enak 1, čeprav literatura navaja podatek 0,11, kar je celo manj od dejanskega geometrijskega albeda Lune $p = 0,12$.

Zato lahko že na tem mestu sklepamo, da površja Lune z modelom Lambertove sfere ne moremo dobro opisati. V resnici Luna večino vpadne svetlobe odbije naravnost nazaj v smer, iz katere je prišla.



Slika 3. Prvi krajec in polna Luna, če bi bilo Lunino površje Lambertovo.

6.1 Navidezni sij prvega krajca

Obravnavajmo drugi posebni primer, in sicer navidezni sij prvega krajca. Na pamet bi rekli, da je polna Luna dvakrat svetlejša od prvega krajca. Kaj pa pravi fazna funkcija za Lambertovo sfero? V primeru prvega krajca izračunamo $\Phi(\pi/2) = 1/\pi$, kar je za faktor π manj kot pri polni Luni. To pomeni, da je v tem modelu polna Luna od prvega krajca svetlejša za faktor π in ne 2, kot bi morda pričakovali.

Z enačbo (15) izračunamo še pripadajoči navidezni sij prvega krajca v tem modelu in dobimo rezultat $m = -11,8$. Če smo se malo poprej nekoliko zmrdovali pri odstopanju med rezultatom $-13,0$ in podatkom iz literature $-12,7$ za polno Luno, se bomo ob podatku o navideznem sijju prvega krajca iz literatura naravnost zgrozili. Zanimivo dejstvo je namreč, da je navidezni sij prvega krajca v resnici $-10,0$. Če vnovič upoštevamo, da je navidezni sij polne Lune enak $-12,7$, iz Pogsonove enačbe dobimo, da razmerje svetlobnih tokov s polne Lune in prvega krajca v tem primeru ustreza faktorju $10^{0,4 \cdot (-10,0 - (-12,7))} \approx 12$.

Tolikšnega razmerja prav gotovo nismo pričakovali, zato je treba o dobljenem rezultatu posebej razmisliti in ga nekoliko razčleniti. Vsekakor bi pričakovali faktor 2, morda π , vendar to še zdaleč ne pojasni dobljenega faktorja 12.

7. Sklep

Ugotovili smo že, da površje Lune ni Lambertovo, saj se na Luno vpadla svetloba ne odbije v vse smeri, temveč se v veliki meri odbije v smer proti Soncu, iz katere je prišla. Ampak kaj bi lahko bil razlog za to?

Površje Lune je nepravilno in hrapavo, saj je posejano s **kraterji** in tako imenovanimi **morji**. Pri večjih faznih kotih, kamor spada tudi prvi krajec, nastane na Luninem površju več senc in je zato "efektivni" albedo manjši. Ko pa se fazni kot približuje vrednosti 0° oziroma se Luna bliža opoziciji, pride do opaznega poskoka svetlosti. Pojav imenujemo **opozicijski učinek**. Sence na Luninem površju takrat izginejo, poleg tega pa k zvišanju svetlosti pripomore tudi **koherentno povratno sipanje**. Gre za pojav, pri katerem se koherentna svetloba siplje na mediju, ki sestoji iz delcev, katerih medsebojna razdalja je primerljiva z valovno dolžino svetlobe [6].

Učinki, ki smo jih omenili, razmerje 12 pojasnjujejo le kvalitativno. V praksi pa bi lahko model spreminjanja svetlosti Lune napravili iz izmerjenih svetlobnih krivulj, s katerimi bi lahko določili pravo fazno funkcijo za Luno.

8. Zahvale

V sklepnem delu članka se želim prijazno zahvaliti Andreju Guštinu, Žanu Arsovu, Gabrijelu Pflaummu, Petru Andolšku, Simonu Bukovšku in Antonu Ramšaku, ki so s svojimi idejami, predlogi in nasveti tako ali drugače pomembno pripomogli k članku. Hvala vam.

LITERATURA

- [1] Guštin, A., Fabjan, D., Kavčič, V., Bukovšek, S. (2024). Zbirka nalog z astronomskih tekmovanj 2009–2024: teorija in rešene naloge za srednje šole (Let. 98, str. 363). Fakulteta za matematiko in fiziko.
- [2] Hulst, H. C. van de. (19812018, cop.). Light scattering by small particles (str. 470). Dover Publications.
- [3] Karttunen, H., Kröger, P., Oja, H., Poutanen, M., & Donner, K. J. (2007). *Fundamental astronomy, fifth edition*. Helsinki: Springer.
- [4] Kuščer, I., Kodre, A. (2016). Matematika v fiziki in tehniki (3. natis, Let. 36, str. 399). DMFA - založništvo.
- [5] Strnad, J. (1995). Fizika. Del 2 (5. natis, Let. 11, str. 294–562). Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije.
- [6] *Opposition surge*, *Wikipedia*, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Opposition_surge, ogled: 1. 10. 2022.
- [7] *Bond albedo*, *Wikipedia*, dostopno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Bond_albedo, ogled: 25. 3. 2025.

Tekmovanje študentov v matematiki

Od leta 2017 poteka tekmovanje Simona Maraisa v znanju matematike. Tekmovanje organizira fundacija s sedežem v Avstraliji, tekmovanje pa je namenjeno vsem študentom, ki jim je všeč matematika in reševanje matematičnih problemov. Prvotno je bilo namenjeno študentom azijsko-pacifiške regije. Leta 2021 so poskusno uvedli tekmovanje v Zahodni diviziji (določeno s časovnimi pasovi, pokriva Evropo in Afriko). Leta 2022 je predsednica Avstralskega matematičnega društva pisala takratni predsednici DMFA, prof. dr. Neži Mramor Kosta, s prošnjo, da bi se tekmovanju priključile tudi slovenske univerze. Po temeljitim razmisleku smo se na FMF odločili za udeležbo.

V zadnjih letih je število raznih tekmovanj za študente precej narastlo. Tekmovanja organizirajo nekatere fakultete, nacionalna društva, mednarodne organizacije in tudi komercialni ponudniki. Zelo različni so pogoji: kdaj tekmovanje poteka, kje, na kakšen način, različne so višine prijavnine, kdo se ga lahko udeleži in podobno. Večina tekmovanj je za nas neprimernih. Nekatera potekajo sredi študijskega leta, ko študenti (in spremljevalci) težje manjkajo dalj časa. Nekatera so logistično bolj zahtevna, druga imajo neprimerno konkurenco, spet tretja pokrivajo specifična področja matematike. Zato je bila dolga leta politika Oddelka za matematiko na FMF, da se udeležimo enega tekmovanja na leto, in to je bilo vedno tekmovanje IMC (ki zadnja leta poteka v Bolgariji).

Tako smo bili pričakovano skeptični do še enega tekmovanja, na katerega nas vabijo. A izkazalo se je, da pravzaprav ni ovir za udeležbo, so pa precejšnje prednosti. Namreč, tekmovanje poteka na daljavo, tako ni treba potovati v Avstralijo. Tekmovanje je vedno na soboto, torej ne ovira študijskega procesa. Poteka v oktobru, ko se študijsko leto ravno dobro začne in so izpiti še daleč. Prijavnina je zastoj, edini strošek je kosilo za tekmovalce, saj je tekmovanje celodnevno. Najbolj uspešni tekmovalci dobijo nagrade, v najbolj osnovni obliki (denar). Tekmovalci lahko sodelujejo posamezno ali pa v dvojicah. Predvsem ta zadnja (delno tudi predzadnja) informacija je dokončno prevesila tehtnico k sodelovanju.

Ekipa FMF je na tekmovanju sodelovala prvič leta 2022, potem pa tudi leta 2023 in 2024. Tudi v letu 2025 načrtujemo udeležbo, kar nekaj razlogov za to bo naštetih v naslednjih odstavkih.

Leta 2022 so tekmovali trije pari in šest posameznikov. Med posamezniki je bil Luka Horjak prvi. Med pari sta Jaka Vrhovnik in Lovro Drofenik dosegla prvo mesto, Beno Učakar in Matevž Mišičič pa peto. Ekipno smo se uvrstili na drugo mesto.

Leta 2023 je tekmovalo sedem parov in osem posameznikov. Spet je bil Luka Horjak prvi med posamezniki, Jan Pantner pa deseti. Jaka Vrhovnik in Lovro Drofenik sta bila med pari prva, Beno Učakar in Jon Mikoš osma

in Maša Žaucer in Matevž Mišičič deveta. Ekipno smo zmagali. Posledično je celotna ekipa prejela posebno nagrado Univerze v Ljubljani za posebne dosežke študentov.

Leta 2024 je tekmovalo že osem parov in devet posameznikov. Tokrat je bil Luka Horjak prvi, Luka Urbanc pa drugi (osvojila sta 46 in 44 točk). Za zgornjo četrtino je bilo dovolj zbrati 18 točk. Med pari sta bila Jaka Vrhovnik in Lovro Drofenik prva, Job Petrovčič in Luka Ponikvar četrta, Anže Križnar in Jakob Šega pa šesta. Spet je bila naša ekipa prva.

Poudariti je sicer treba, da tekmovanje poteka v dveh divizijah, vrstni red je določen za vsako izmed njiju. Delno je to tudi zaradi tega, ker v Vzhodni diviziji rešujejo najprej sklop nalog A, po odmoru rešujejo sklop nalog B hkrati z Zahodno divizijo, nato pa še Zahodna divizija rešuje sklop nalog C. Organizatorji ne objavijo posebej rezultatov sklopa B, kjer bi bila možna neposredna primerjava med vsemi sodelujočimi.

Še eno posebnost ima tekmovanje: en del ene naloge nima znane rešitve. Tako se tekmovalci lahko preizkusijo v čisto pravem raziskovalnem delu, res pa je, da so časovno zelo omejeni: za vsak sklop štirih nalog imajo tri ure časa. Tako je skupno možno število točk enako 56, z dodatnimi 7 točkami za nerešen problem.

Kako je videti nerešena naloga, si bomo ogledali na primeru naloge iz leta 2022. Nato sledita še dve nalogi iz let 2023 in 2024. Druge naloge ter celotne rezultate si lahko ogledate na strani tekmovanja, www.simonmarais.org.

Naloga 1 (2022) Naj bosta $a_0, a_1, a_2, \dots$ in $b_0, b_1, b_2, \dots$ dve zaporedji celih števil, za kateri velja $a_0 \cdot b_0 \geq 600$ in

$$a_{n+1} = a_n + 2\lfloor b_n/20 \rfloor,$$

$$b_{n+1} = b_n + 3\lfloor a_n/30 \rfloor,$$

za vse $n \geq 0$.

(a) Dokazite, da obstaja celo število N , da je za vsak $n \geq N$

$$-13 \leq a_n - b_n \leq 23.$$

(b) Ali vedno obstaja celo število n , za katerega velja $a_n = b_n$?

Ideja rešitve. Če je a_n deljivo s 30 in b_n deljivo z 20, je $a_{n+1} = a_n + b_n/10$ in $b_{n+1} = b_n + a_n/10$, od koder je $a_{n+1} - b_{n+1} = 9/10(a_n - b_n)$, kar pomeni, da se razlika manjša. Zaradi zaokroževanja je lahko razlika tudi malo večja (ali manjša), kar natančno lahko omejimo v (a) točki naloge. Drugi del, za katerega se zdi, da bi lahko držal, ostaja v obliki hipoteze tudi po tekmovanju.

Naloga 2 (2023) Na teniškem turnirju sodeluje 256 igralcev, ki so rangirani s števkami od 1 do 256, pri čemer 1 ustreza najvišji uvrstitvi, 256 pa najnižji uvrstitvi. Ko dva igralca igrata tekmo na turnirju, igralec z višjo uvrstitvijo zmagava z verjetnostjo $3/5$.

V vsakem krogu turnirja igra igralec z najvišjo uvrstitvijo proti igralcu z drugo najvišjo uvrstitvijo, igralec s tretjo najvišjo uvrstitvijo igra proti igralcu s četrto najvišjo uvrstitvijo in tako naprej. Na koncu kroga igralci, ki zmagajo, napredujejo v naslednji krog, igralci, ki izgubijo, pa izpadejo iz turnirja. Po osmih krogih v turnirju ostane en igralec, ki je razglašen za zmagovalca.

Določite pričakovano vrednost ranga zmagovalca.

Rešitev.

Bolj splošno, predpostavimo, da je 2^n igralcev, tako da turnir traja n krogov. Nadalje predpostavimo, da oseba z višjim rangom zmagava v tekmi z verjetnostjo p . Naj bo W slučajna spremenljivka, ki ustreza rangu zmagovalca. Lahko bi poiskali porazdelitev W in izračunali njeno pričakovano vrednost. Morda lažji način je, da z indukcijo dokažemo, da je pričakovana vrednost za vsako naravno število n enaka

$$E(W) = 2^n(1 - p) + p.$$

V primeru $n = 1$ je na turnirju le ena tekma in velja $E(W) = 1 \cdot p + 2 \cdot (1 - p) = 2 - p = 2(1 - p) + p$, kar dokazuje, da izraz velja za $n = 1$.

Sedaj predpostavimo, da je trditev pravilna za neko pozitivno celo število n in si oglejmo turnir z 2^{n+1} igralci. Opazimo, da zgornjo polovico turnirja (igralce z rangom od 1 do 2^n) lahko obravnavamo kot turnir z 2^n igralci, ki da finalista z višjo uvrstitvijo, spodnjo polovico turnirja pa kot turnir z 2^n igralci, ki da finalista z nižjo uvrstitvijo. Po induksijski predpostavki je povprečen rang finalista iz zgornje polovice enak $2^n(1 - p) + p$ (in v finalu zmagava z verjetnostjo p), v spodnji polovici pa je natanko za 2^n večji (in zmagava z verjetnostjo $1 - p$). Tako je

$$E(W) = (2^n(1 - p) + p)p + (2^n + 2^n(1 - p) + p)(1 - p) = 2^{n+1}(1 - p) + p$$

in trditev je dokazana.

Za rešitev konkretne naloge vstavimo $n = 8$ in $p = \frac{3}{5}$ za rezultat $E(W) = 103$.

Naloga 3 (2024) Naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Določite vsa realna števila r , za katera velja $f(f(r)) = r$.

Rešitev.

Ker je $f'(x) = 3x^2 + 6x + \frac{7}{2} > 3(x+1)^2 \geq 0$, je f strogo naraščajoča funkcija.

Če je $r < f(r)$, je (ker je f naraščajoča) $f(r) < f(f(r))$, in če velja $f(f(r)) = r$, dobimo protislovje. Podobno protislovje dobimo, če je $f(r) > r$. Zato so edine rešitve enačbe $f(f(r)) = r$ rešitve $f(r) = r$. Ker je

$$f(r) - r = r^3 - 3r^2 + \frac{5}{2}r - \frac{1}{2} = (r-1) \left(r^2 - 2r + \frac{1}{2} \right),$$

so edine tri rešitve 1 , $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ in $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$.

Z veseljem pričakujemo tekmovanje v letu 2025. Morda pa se v letu 2026 pridruži še kakšna ekipa iz Slovenije.

Gregor Šega

Dvaintrideseto mednarodno tekmovanje študentov matematike

Tudi letos je potekalo mednarodno tekmovanje študentov matematike *International mathematics competition*, na kratko IMC. Dvaintrideseta izvedba tekmovanja je potekala med 28. julijem in 3. avgustom v bolgarskem mestu Blagoevgrad. Tekmovanja se je udeležilo kar 434 tekmovalcev, ki so zastopali 74 ekip. Ekipе običajno sestavljajo člani iste univerze ali predstavniki iste države, najštevilnejšo ekipo, ki jo vodi maskota tekmovanja *Ivan the Confessor*, pa sestoji iz študentk in študentov, ki so na tekmovanje prišli brez svoje ekipe.

Slovenija je na tekmovanje poslala 11 tekmovalcev. Fakulteto za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani so letos zastopali **Luka Urbanc** iz prvega letnika, **Katarina Grilj**, **Kaja Rajter**, **Matija Skrt** in **Hugo Trebše** iz drugega letnika, **Luka Ponikvar** iz tretjega letnika ter **Jaka Vrhovnik** in **Patrik Žnidaršič** iz prvega letnika druge stopnje. FAMNIT z Univerze na Primorskem pa so zastopali **Jalal Ahmed Chowdhury** in **Eric González Vicent** iz prvega letnika ter **Diar Gashi** iz prvega letnika druge stopnje. Vodja in sovodja ekipe FMF-ja sva bila Beno Učakar in Luka Horjak, vodja ekipe FAMNIT-a pa je bil Slobodan Filipovski.

Tudi letos se lahko pohvalimo z odličnimi rezultati. Luka Urbanc in Luka Ponikvar sta osvojila prvo nagrado, Jaka Vrhovnik in Hugo Trebše drugo, dobitniki tretje nagrade pa so bili Matija Skrt, Patrik Žnidaršič in Katarina Grilj. Diar Gashi in Eric González Vicent sta dobila pohvalo, Kaja Rajter in Jalal Ahmed Chowdhury pa sta prejela potrdilo o odeležbi. Ta izkupiček



Slika 1. Skupinska fotografija ekipe FMF-ja po podelitvi nagrad.

je še toliko bolj impresiven, saj se je večina teh tekmovalcev tekmovanja udeležila prvič. Obe univerzi sta se odlično odrezali tudi na ekipni lestvici, kjer se je ekipa FMF-ja uvrstila na 19. mesto, ekipa FAMNIT-a pa na 66. mesto.



Slika 2. Skupinska fotografija ekipe FAMNIT-a po podelitvi nagrad.

Tekmovanje IMC je priložnost za podjetja, da se predstavijo mladim matematikom in najdejo nadarjen kader. Letos je bilo tako še več sponzorjev kot pretekla leta. Da bi študente privabili k svojim razstavnim prostorom, so ponujali promocijski material, organizirali cono z videoigrami in celo delili brezplačne lego kocke. Kot vsako leto pa je tekmovanje zaznamovalo tudi nekaj organizacijskih težav, kar je skoraj že tradicija pri IMC-ju. Tokrat smo bili nekaj dni brez vode, saj so zaradi vzdrževalnih del vodo v

mestu klorirali, en dan pa nas je ujel dež. Slednje morda niti ne zveni tako slabo, če pomislimo na običajne poletne temperature v Bolgariji, je pa malo neugodno, ko začne puščati strop sredi jedilnice.

V nadaljevanju bi vam rad predstavil nekaj nalog, ki so jih študenti reševali na tekmovanju. Izbrane naloge so med lažjimi, tako da bralce vabim, da jih poskusijo rešiti tudi sami. Naloge bom najprej zastavil, nato pa bom predstavil še njihove rešitve.

Naloga 1. Naj bo $p \in \mathbb{R}[x]$ polinom z realnimi koeficienti in denimo, da je $\text{st}(p) \geq 2$. Za vsak $x \in \mathbb{R}$ naj bo $l_x \subseteq \mathbb{R}^2$ tangenta na graf polinoma p v točki $(x, p(x))$.

- Dokaži, da če je polinom p lihe stopnje, potem velja $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} l_x = \mathbb{R}^2$.
- Ali obstaja kak polinom p sode stopnje, za katerega bi veljalo $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} l_x = \mathbb{R}^2$?

Naloga 2. Za realno $n \times n$ matriko $A \in M_n(\mathbb{R})$ naj bo A^R matrika, ki jo dobimo, če matriko A zavrtimo za 90° v nasprotni smeri urnega kazalca. Tako je na primer

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}^R = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Dokaži, da če velja $A = A^R$, so lastne vrednosti matrike A bodisi realne bodisi imaginarne.

Naloga 3. Določi vse podmnožice $M \subseteq \mathbb{N}$, za katere velja:

- Če je $x \in M$, potem je $2x \in M$.
- Če sta $x, y \in M$ in je $x + y$ sodo število, potem je $\frac{x+y}{2} \in M$.

Rešitev naloge 1. Tangenta l_x je premica, ki gre skozi točko $(x, p(x))$ in ima smerni koeficient $p'(x)$, torej je podana z enačbo $Y = p'(x)(X - x) + p(x)$. Točka $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ bo ležala na tej premici natanko tedaj, ko bo veljala zveza $b = p'(x)(a - x) + p(x)$. Desna stran te enačbe je polinom v spremenljivki x , ki ga označimo z q_a . Točka (a, b) bo torej ležala na tangenti l_x natanko tedaj, ko bo veljalo $q_a(x) = b$.

Denimo, da je polinom p oblike $p(x) = c_n x^n + \dots + c_1 x + c_0$, kjer je $c_n \neq 0$. Potem je polinom q_a oblike $q_a(x) = p(x) - xp'(x) + ap'(x) = c_n(n-1)x^n + \dots$. Ker sta po predpostavkah $c_n \neq 0$ in $n \geq 2$, je vodilni koeficient polinoma q_a neničeln. Sledi, da velja $\text{st}(q_a) = n = \text{st}(p)$ za vsak $a \in \mathbb{R}$.

Za (a) del naloge naj bo $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ poljubna točka. Ker je polinom p lihe stopnje, je takšen tudi polinom q_a . Ker pa so polinomi lihe stopnje surjektivni, obstaja $x \in \mathbb{R}$, da velja $q_a(x) = b$, torej točka (a, b) leži na tangenti l_x . Ker je bila točka (a, b) poljubno izbrana, smo s tem pokazali $\bigcup_{x \in \mathbb{R}} l_x = \mathbb{R}^2$.

Za (b) del naloge fiksirajmo $a = 0$ in denimo, da je polinom p sode stopnje. Potem je sode stopnje tudi polinom q_0 , ker pa polinomi sode stopnje niso nikoli surjektivni, obstaja $b \in \mathbb{R}$, ki ne leži v zalogi vrednosti polinoma q_0 . To pomeni, da točka $(0, b)$ ne leži na nobeni tangenti l_x . Iskani polinom sode stopnje torej ne obstaja. ■

Rešitev naloge 2. Če označimo $A = [a_{i,j}]_{i,j=1}^n$ in $A^R = [b_{i,j}]_{i,j=1}^n$, opazimo, da velja zveza $b_{i,j} = a_{j,n+1-i}$. Z malo truda vidimo, da lahko operacijo vrtenja matrike izrazimo kot $A^R = JA^T$, kjer je J matrika velikosti $n \times n$, ki ima enice na anti-diagonali in ničle drugod. Če je torej $A = A^R$, velja $A^2 = AA^R = AJA^T$, matrika na desni strani pa je očitno simetrična. Sledi, da je tudi matrika A^2 simetrična in ima zato same realne lastne vrednosti, lastne vrednosti matrike A^2 pa so ravno kvadrati lastnih vrednosti matrike A . Če je torej λ lastna vrednost matrike A , velja $\lambda^2 \in \mathbb{R}$, kar pa ravno pomeni, da je λ bodisi realno bodisi imaginarno število. ■

Rešitev naloge 3. Naj bo $M \subseteq \mathbb{N}$ množica, ki zadošča pogojem naloge. Najprej opazimo, da je zaprta za seštevanje. Če sta namreč $x, y \in M$, sta $2x, 2y \in M$ po lastnosti (a) in $x + y = \frac{2x+2y}{2} \in M$ po lastnosti (b). V posebnem to pomeni, da je množica M zaprta za množenje z naravnimi števili. Množica M gotovo vsebuje tudi kakšno liho število, saj če je $x \in M$ sodo število, je tudi $\frac{x+2x}{2} = \frac{3x}{2} \in M$. Ta postopek lahko ponavljamo, dokler ne dobimo elementa množice M , ki nima dvojice v praštevilskega razcepu.

Naj bo d največji skupni delitelj elementov množice M . Potem velja $M \subseteq d\mathbb{N}$, in ker množica M vsebuje liho število, mora tudi število d biti liho. Bezoutov izrek pove, da obstajajo števila $a_i \in M$ in $\alpha_i \in \mathbb{N}$, tako da velja

$$d = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k - \alpha_{k+1} a_{k+1} - \alpha_{k+2} a_{k+2} - \dots - \alpha_n a_n.$$

Z drugimi besedami, množica M vsebuje dva elementa, ki se razlikujeta za d .

Naj bo sedaj c najmanjši element množice M in $c < a$ takšen, da velja $a, a + d \in M$. Naj bo $x \in M$ največji element, za katerega velja $x < a$. Ker je $M \subseteq d\mathbb{N}$, so x, a in $a + d$ edini elementi množice M na intervalu

$[x, a + d]$. Ker je $x < \frac{x+a}{2} < a$, mora zaradi maksimalnosti x število $x + a$ biti liho. Torej je število $x + a + d$ sodo in velja $\frac{x+a+d}{2} \in M$. Ker pa je $x < \frac{x+a+d}{2} < a + d$, mora veljati $\frac{x+a+d}{2} = a$ oziroma $x = a - d$. Tako smo pokazali:

$$a, a + d \in M \text{ in } c < a \implies a - d \in M.$$

Naj bo sedaj $x \in M$ najmanjši element, da velja $x > a + d$. Tak element gotovo obstaja, saj je $2(a + d) \in M$. Ker je $M \subseteq d\mathbb{N}$, so $a, a + d$ in x edini elementi množice M na intervalu $[a, x]$. Ker je $a + d < \frac{x+a+d}{2} < x$, mora biti zaradi minimalnosti x število $x + a + d$ liho. Število $x + a$ je torej sodo in velja $\frac{x+a}{2} \in M$. Ker pa je $a < \frac{a+x}{2} < x$, mora veljati $\frac{a+x}{2} = a + d$ oziroma $x = a + 2d$. Tako smo pokazali:

$$a, a + d \in M \implies a + 2d \in M.$$

Zgornje nam torej pove, da je množica M oblike $M = \{nd \mid m \geq n \in \mathbb{N}\}$, kjer je $c = dm$. Zlahka se prepričamo, da takšna množica res tudi zadošča pogoju (a) in (b) iz naloge. ■

Samo pisanje nalog na tekmovanju poteka dva dni. Vsak dan imajo tekmovalci časa 5 ur, da rešijo 5 nalog, ki so načeloma urejene po težavnosti. Področja nalog obsegajo analizo, algebro, teorijo števil, diskretno matematiko, zadnja leta pa se pojavljajo tudi naloge iz verjetnosti. Naloge na tekmovanju se točkujejo s celimi števili med 0 in 10. Za občutek si oglejmo, kako je šlo tekmovalcem reševanje zgoraj predstavljenih nalog. Povprečno število doseženih točk za prvo nalogo je bilo 8,21, za drugo nalogo 4,85 in za tretjo nalogo 5,37. Dosežek pri najtežji nalogi na letošnjem tekmovanju pa je bil v povprečju 0,23 točke.

Preostale naloge in več o tekmovanju lahko najdete na spletni strani <https://www.imc-math.org.uk/>. Držim pesti, da bo prihodnje leto tekmovanje tudi tako uspešno, kot je bilo letos!

Beno Učakar

DIAMANTNI SPONZOR DMFA SLOVENIJE



V DRUŽBI DOBRIH LJUDI

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, SEPTEMBER 2025

Letnik 72, številka 2

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Svet brez trikotnikov (Aleksandar Jurišić)	41–62
O albedih (Vid Kavčič)	63–73
Novice	
Tekmovanje študentov v matematiki (Gregor Šega)	74–77
Dvaintrideseto mednarodno tekmovanje študentov matematike (Beno Učakar)	77–VII

CONTENTS

Articles	Pages
A universe without triangles (Aleksandar Jurišić)	41–62
On albedos (Vid Kavčič)	63–73
News	74–VII

Na naslovnici: Sebi dualen posplošeni četrkotnik $GQ(2, 2)$. Točke so prirejanja v polnem grafu K_6 . Tri prirejanja pa sestavljajo premico, kadar je njihov presek povezava v K_6 . Slednji je narisano tako, da najprej narišemo K_5 , potem pa v sredino postavimo še šesto vozlišče, ki ga povežemo s petimi vozlišči, s katerimi smo začeli. Za 3D (stereogramsko vrtečo se) predstavitev pa bralcem priporočamo <https://www.qedcat.com/oldgeometry/gq1.html> (ogleda vredna je tudi konfiguracija Cremona-Richmond https://en.wikipedia.org/wiki/Cremona-Richmond_configuration). Več v matematičnem članku Svet brez trikotnikov..