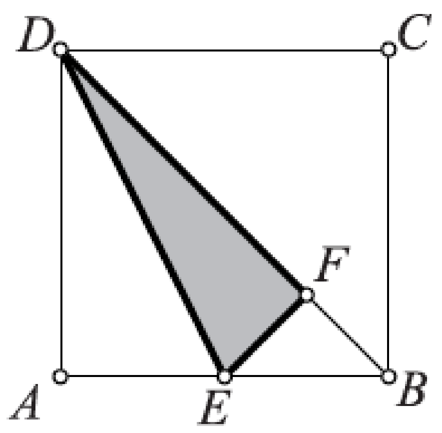
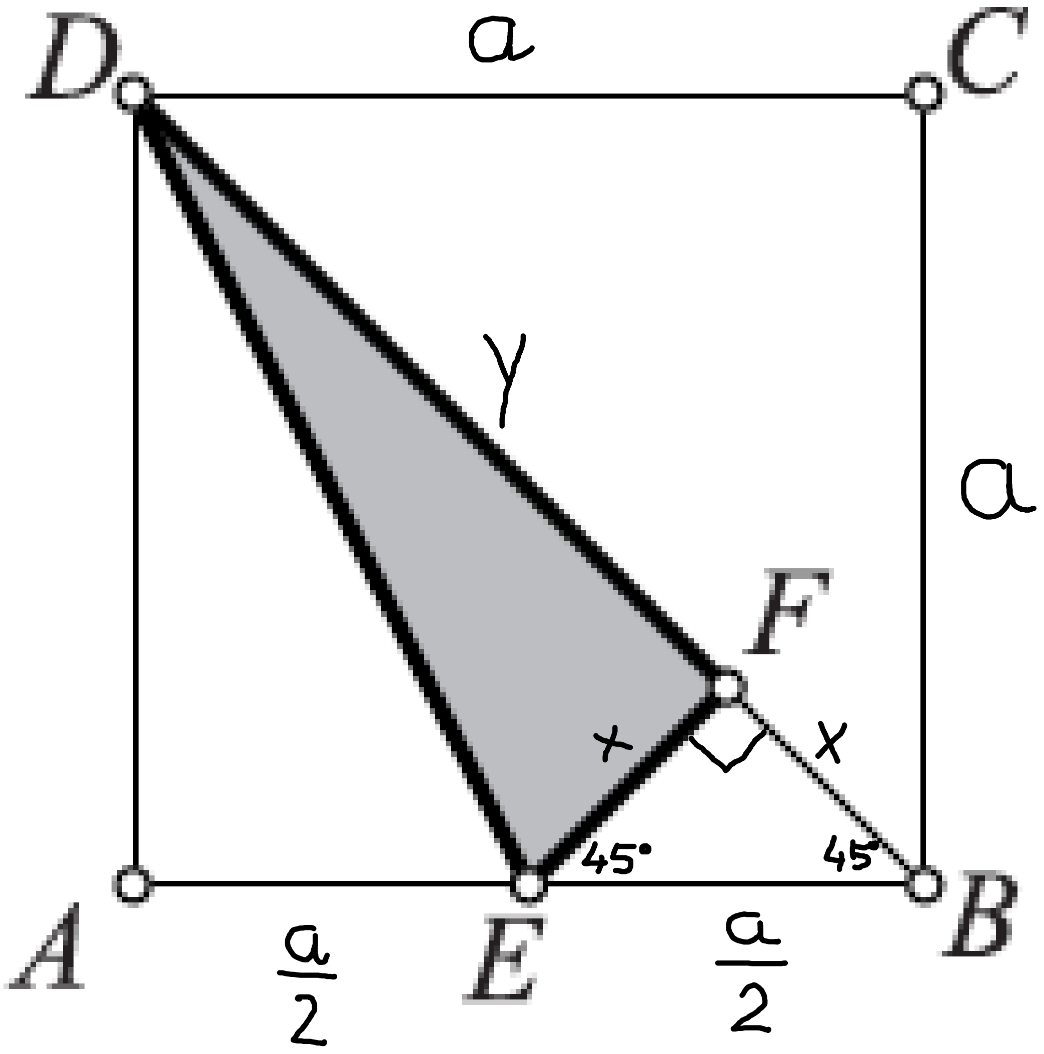
- Reševanje nalog odprtega tipa na konkretnih primerih iz preteklih tekmovanj
- Analiza reševanja nalog tipa B za 9. razred iz DT 2023

Janja Pirc
OŠ Vodice
članica državne tekmovalne komisije MAOŠ

DRŽAVNO 2017 – 9. RAZRED

B1. Točka E je razpolovišče stranice AB kvadrata $ABCD$. Točka F leži na diagonali BD tako, da je daljica EF pravokotna na diagonalo BD. Kolikšen del ploščine kvadrata $ABCD$ predstavlja ploščina trikotnika EFD? *(6 točk)*





$$\frac{p_t}{p_k} = ?$$

V trikotniku ΔEBF:

- kot pri oglišču F: $\sphericalangle F = 90°$;
- kot pri oglišču B: $\sphericalangle B$ je $45°$;

$\sphericalangle E$ je $45°$;

Trikotnik ΔEBF je enakokrak pravokotni trikotnik s krakom x. Oziroma to je polovica kvadrata s stranico x in diagonalo $\frac{a}{2}$.

$$\frac{a}{2} = x\sqrt{2}$$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

d = x + y

d = a$\sqrt{2}$

$$y = a\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$y = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

$$p_t = \frac{x \cdot y}{2}$$

$$p_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

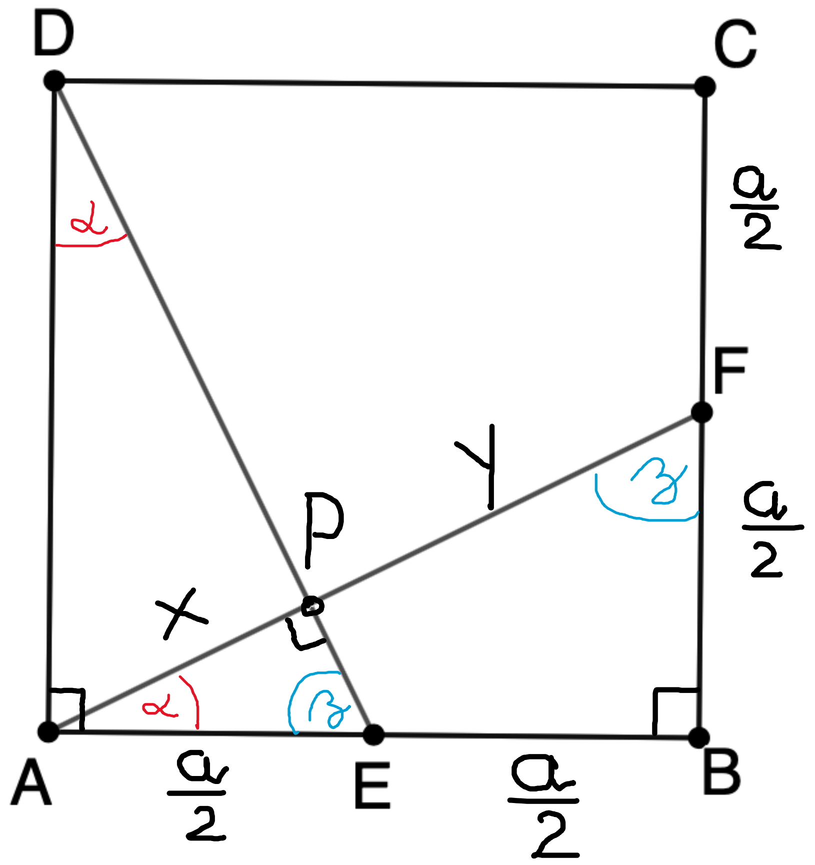
$$p_t = \frac{3a^2}{16}$$

Ker je $p_k = a^2$ velja, da je $p_t = \frac{3}{16} p_k$.

DRŽAVNO 2015 – 9. RAZRED

2. Točka E je razpolovišče stranice AB kvadrata $ABCD$, točka F pa razpolovišče stranice BC. Daljici AF in ED se sekata v točki P. Izračunaj razmerje dolžin daljic AP in PF.

2. Točka E je razpolovišče stranice AB kvadrata $ABCD$, točka F pa razpolovišče stranice BC. Daljici AF in ED se sekata v točki P. Izračunaj razmerje dolžin daljic AP in PF.



- Pravokotna trikotnika ΔABF in ΔAED sta skladna, saj se ujemata v dveh stranicah ($AB \cong AD$ in $BF \cong AE$) in kotu med njima ($\sphericalangle EAD \cong \sphericalangle FBA$). Iz tega sledi, da sta si skadna tudi druga dva para kotov, ki smo ju na sliki označili z α in β.
- Trikotnik ΔAEP je tudi pravokotni trikotnik, saj sta dva njegova kota α in β, zato je tretji kot pravi. $\longrightarrow$ ΔAEP in ΔABF se ujemata v vseh treh parih kotov, zato velja: $\Delta AEP \sim \Delta ABF$

$$|AF|^2 = |AB|^2 + |BF|^2$$
$$|AF|^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$
$$|AF| = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$|AE| : |AF| = |AP| : |AB|$$
$$\frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{5}}{2} = x : a$$
$$x = |AP| = \frac{a\sqrt{5}}{5}$$

$$y = |AF| - x$$
$$y = \frac{a\sqrt{5}}{2} - \frac{a\sqrt{5}}{5}$$
$$y = |PF| = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

$$x : y = \frac{a\sqrt{5}}{5} : \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$
$$x : y = 2 : 3$$
$$|AP| : |PF| = 2 : 3$$

POMEMBNO:
- Vsaka ugotovitev se zapiše in utemelji ter označi tudi na skici.

DRŽAVNO 2019 – 9. RAZRED

B1. Obravnavaj enačbo $(2x+3)^2-(2x-a)(2x+a)=2a(2x+a)$ z neznanko x.

POZOR:

- kvadrat dvočlenika – 3 členi
- produkt vsote in razlike je odštet
- neznanka x

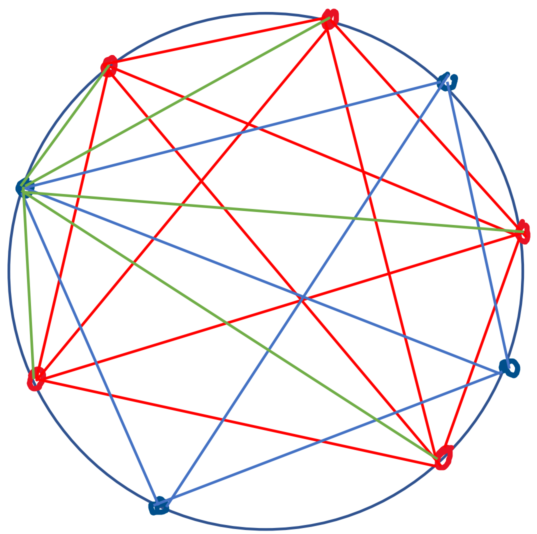
$$(2x+3)^2-(2x-a)(2x+a)=2a(2x+a)$$
$$4x^2+12x+9-(4x^2-a^2)=4ax+2a^2$$
$$\cancel{4x^2}+\underbrace{12x}+9-\cancel{4x^2}+a^2=\underbrace{4ax}+2a^2$$
$$12x-4ax=a^2-9$$
$$4x(3-a)=(a-3)(a+3)$$
$$x(3-a)=\frac{(a-3)(a+3)}{4}$$

$$3-a=0$$
$$a=3$$
$$\downarrow$$
$$x\cdot 0=0$$
$$\mathcal{R}=\mathbb{R}$$

$$3-a\neq 0$$
$$a\neq 3$$
$$\downarrow$$
$$x=\frac{(a-3)(a+3)}{4(3-a)}$$
$$x=\frac{(a-3)(a+3)}{-4(a-3)}$$
$$x=-\frac{(a+3)}{4}$$
$$\mathcal{R}=\left\{-\frac{(a+3)}{4}\right\}$$

DRŽAVNO 2017 – 9. RAZRED

B2. Anja je na krožnico narisala nekaj modrih in nekaj rdečih točk. Nato je vse točke povezala med sabo z daljicami: vsaki dve rdeči točki z rdečo daljico, vsaki dve modri pa z modro daljico. Vsako modro točko je z zeleno daljico povezala z vsako rdečo točko. Na koncu je bilo narisanih 15 rdečih daljic, zelenih in modrih pa je bilo skupaj 121. Koliko modrih točk je narisala Anja? *(6 točk)*



VEČKOTNIKI:

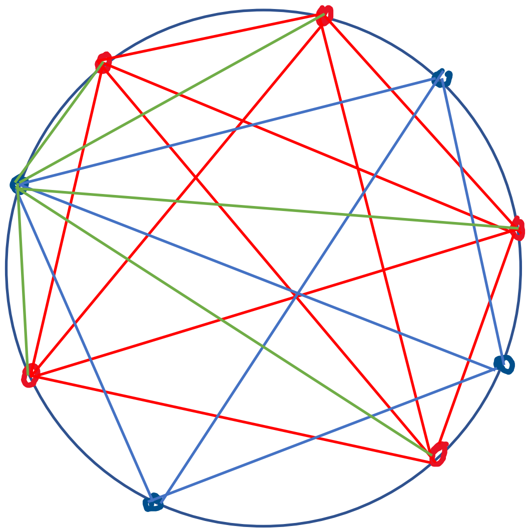
- Število rdečih daljic je enako vsoti števila stranic in števila diagonal v večkotniku, ki ima rdeča oglišča – r oglišč:

$$\frac{r(r-3)}{2}+r=\frac{r^2\ -3r+2r}{2}=\frac{r\ (r-1)}{2}$$

- Število modrih daljic je enako vsoti števila stranic in števila diagonal v večkotniku, ki ima modra oglišča – m oglišč:

$$\frac{m(m-3)}{2}+m=\frac{m^2\ -3m+2m}{2}=\frac{m\ (m-1)}{2}$$

- Število zelenih daljic je enako zmnožku števila modrih in rdečih daljic: $z=m\cdot r$.



Število rdečih daljic je 15:

$$\frac{r\,(r-1)}{2} = 15$$

$$r\,(r-1) = 30$$

$$r\,(r-1) = 6 \cdot 5$$

$$r = 6$$

ali

$$r^2 - r - 30 = 0$$

$$(r-6)(r+5) = 0$$

$$r = 6$$

$r = -5$ ni smiselna rešitev, ker je število rdečih točk pozitivno celo število.

Število modrih in zelenih skupaj je 121:

$$\frac{m\,(m-1)}{2} + mr = 121$$

$$\frac{m\,(m-1)}{2} + m \cdot 6 = 121$$

$$m^2 - m + 12m = 242$$

$$m(m+11) = 242$$

$$m(m+11) = 11 \cdot 22$$

$$\boldsymbol{m = 11}$$

242	2
121	11
11	11
1	

Odg: Anja je narisala 11 modrih točk.

POVZETEK:

- učencem damo čas, da razmislijo;
- rišejo natančne skice, uporabljajo barve;
- podatke si izpišejo ali vsaj podčrtajo, uporabijo barve;
- razmislijo o smiselnosti podatkov;
- vse ugotovitve zapišejo in utemeljijo;
- pazljivost na vrstnemu redu računskih operacij pri reševanju izrazov in enačb;
- pri reševanju izrazov in enačb naj ne preskajujejo korakov;

59. tekmovanje iz matematike za Vegovo priznanje

Državno tekmovanje, 22. april 2023

Naloge za 9. razred

B1. Za katera naravna števila n velja, da je vrednost izraza $n^2 - 333$ kvadrat nekega naravnega števila?

B1

$n^2 - 333 = x^2$

$n^2 - x^2 = 333$

Razlika njunih kvadratov mora biti enaka 333.

∀ 0

B1.

$n^2-333=(n-\sqrt{333})\cdot(n+\sqrt{333})=(n-3\sqrt{37})\cdot(n+3\sqrt{37})$

$(n-3\sqrt{37})\cdot(n+3\sqrt{37})$

Če hočemo, da bo dobljeno število kvadrat naravnega števila mora biti $n^2>333$, torej mora biti $n>18$ saj je ~~kvadrat~~ $18^2=324$

ZAČNEMO POSKUŠAT

$19^2-333=361-333=28$ $\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ X

$20^2-333=400-333=67$

$n^2-333=a^2$

$n^2=a^2+333 \quad /\sqrt{\ }$

$n=\sqrt{a^2+333}$

0

B1

$\boxed{n^2-333=x^2}$ $\boxed{x=\mathbb{N}}$

$\boxed{n^2>333}$ $\boxed{n>18}$

$23\cdot 23=529$

$529-333=196$

$196=14^2$

$n^2-333=$

$=23^2-333$

$=529-333$

$=196$

$=14^2$

$n=23$ ✓

$\mathbb{R}=\{23$

$n^2-333=$

$=24^2-333=$

$=576-333$

$=243$

$n^2-333=$

$=26^2-333=$

$=676-333=$

$=343$

$n^2-333=$

$=27^2-333$

$=729-333$

$=396$

$n^2-333=$

$=25^2-333$

$=625-333$

$=292$

A naloge

$\frac{3}{10}$

B.1.

$\cancel{18^2 = 324}$

$19^2 = 361 - 333 = 28$

$20^2 = 400 - 333 = 67$

$21^2 = 441 - 333 = 108$

$22^2 = 484 - 333 = 151$

$23^2 = 529 - 333 = 196$ ✓

$24^2 = 576 - 333 = 243$

$25^2 = 625 - 333 = 292$

$26^2 = 676 - 333 = 343$

$27^2 = 729 - 333 = 396$

$28^2 = 784 - 333 = 451$

$29^2 = 841 - 333 = 508$

$30^2 = 900 - 333 = 567$

$31^2 = 961 - 333 = 648$

$32^2 = 1024 - 333 = 681$

$33^2 = 1089 - 333 = 756$

$34^2 = 1156 - 333 = 823$

$35^2 = 1225 - 333 = 892$

To velja za število 23 pri katerem dobimo 196 kar je kvadrat števila 14.

$\boxed{\text{B1}}$

$n^2 - 333 = x^2$ → nečo naravno število

$2^2 - 1^2 = 3$
$3^2 - 2^2 = 5$ +2
$4^2 - 3^2 = 7$ +2
$5^2 - 4^2 = 9$ +2
$6^2 - 5^2 = 11$ +2
$\vdots$

Razlika kvadratov zaporednih naravnih števil je vedno liho št. Razlike kvadratov zaporednih n števil naraščajo za +2.

$$\boxed{\begin{array}{c} 5^2 - 4^2 = 9 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 5 + 4 = 9 \end{array}}$$

167 166

$$\begin{array}{r} 167 \cdot 167 \\ \hline 16700 \\ +\ 10020 \\ +\ 1169 \\ \hline 27889 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 166 \cdot 166 \\ \hline 16600 \\ +\ 9960 \\ \hline 996 \\ \hline 27556 \end{array}$$

Dve zaporedni naravni št., katerih vsota je 333, sta 167 in 166.

$$\boxed{167^2 - \cancel{166}\ 333 = 166^2.}$$

$41^2 \quad 9^2$

Naravno št., ki ga iščemo je 167.

$41 \cdot 4$

B1.

$n \in \mathbb{N}$
$x \in \mathbb{N}$

$n^2 - 333 = x^2$

$x = \sqrt{n^2 - 333}$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= 3n\sqrt{37} \\ n &= \frac{x\sqrt{37}}{333} \end{aligned}}$$

333	3
111	3
37	37
1	

$n^2 > 333$

$18^2 = 324 < 333$

$19^2 = 361 > 333$

$n^2 \geq 19$

$111 : 3 = 37$
21
0

Tako število n ne obstaja, saj bi po izrazu $x = 3n\sqrt{37}$ potrebovali za število n večkratnik $\sqrt{37}$, da bi bil $x \in \mathbb{N}$, torej n ne bi bilo naravno število.

0 0

n in a sta naravni števili

$n^2 - 333 = a^2$

$n > \sqrt{333}$ ⇒ zato, da je a^2 večje od 0

$333 : 13 = 2$
$333 : 11 = 30$
$333 : 9 = 37$

$n^2 - 333 = a^2$

$n^2 = a^2 + 333$

$n^2 - a^2 = 333$

$(n+a)(n-a) = 333$

~~$D_{333} = \{1, 3, 7, 9, 111, 333\}$~~

~~$n+a = \{1, 3, 7\}$~~

~~$n-a = \{9$~~

$D_{333} = \{1, 3, 9, 37, 111, 333\}$

~~$n+a\{1, 3, 9\}$~~

$n+a = \{37, 111, 333\}$

$n-a = \{1, 3, 9\}$

$\boxed{n = \{167, 57, 23\}}$

Če je $n-a = x$ potem je $n+a = \frac{333}{x}$

x je delitelj števila 333, zato da sta n in a naravni števili.

$n-a = 1 \quad n+a = 333$

$\downarrow$

$2n = 334$

$n = 167$

6

$n-a = 3 \quad n+a = \frac{333}{3} = 111$

$2n = 114$

$n = 57$

$n-a = 9 \quad n+a = \frac{333}{9} = 37$

$2n = 46$

$n = 23$

1 333

167 166

166 + 167 = 333

$18 \cdot 27$
36
126
486

$27 \cdot 20$
540

B1) Preoblikujemo izraz:

$n^2-333=x^2$ $\quad n^2-x^2=333$ $\quad (n-x)(n+x)=333$

Razcepimo 333 na prafaktorje:

333	3
111	3
37	37
1	

Zmnožek bo 333, ko bo v oklepajih 1 in 333; 3 in 111; 9 in 37. Števila v oklepajih ne smejo biti negativna, saj morata biti n in x naravni števili, rezultat pa je pozitiven. Vedno bo veljalo: $n>x$.

$n-x=1$
$n+x=333$
$n=\frac{334}{2}=167$
$n=167$,
$x=166$

$n-x=3$
$n+x=111$
$n=\frac{114}{2}=57$
$n=57$
$x=54$

$n-x=9$
$n+x=37$
$n=\frac{46}{2}=23$
$n=23$
$x=14$

O: Vrednost izraza n^2-333 je kvadrat nekega naravnega števila, ko je n enak 167, 57 ali 23.

BONUS VIC:

V: Kaj je 0 rekla 8?

O: Kako lep pas!

B2. Reši enačbo $\frac{2}{3}mx^2 + 2mx - 8 = 6x$, če veš, da je m tako realno število, pri katerem ima izraz $2m^2 - 12m + 18$ najmanjšo vrednost.

B2

$\frac{2}{3}mx^2 + 2mx - 8 = 6x$

$\frac{2}{3} \cdot 5.4x^2 + 2 \cdot 5.4x - 8 = 6x$

$\frac{2 \cdot \cancel{5.4} \cdot 1.8}{\cancel{3} \cdot 1 \cdot 1}x^2 + 10.8x - 8 = 6x$

$3.6x^2 + \cancel{10x}\ 10.8 - 8 = 6x$

$3.6x^2 + 10.8x - 6x = 8$

$3x(1.2x + 3.6 - 0.6) = 8 / : (1.2x + 3.6 - 0.6)$

$3.6 : 3 = 1.2$

$10.8 : 3 = 3.6$

$3x = 9.6x + 28.8 - 4.8$

$3x - 9.6x = 28.8 - 4.8$

$-6.6x = 24 / : (-6.6)$

$x = 3.65$

$240 : 66 = 3.65$

$m = \mathbb{R}$

$2m^2 - 12m + 18 =$

$\cancel{(20^2 - 12 \cdot 0) + 18 =}$

$\cancel{0 - 0 + 18 = 18}$

$2 \cdot m^2 - 12m = -18$

$2m(m-6) = -18 / : (m-6)$

$2m = -18m + 108$

$18m + 2m = 108$

$20m = 108 / : 20$

$m = 5.4$

B2.

$\frac{2}{3}mx^2+2mx-8=6x$

$\frac{2}{3}\cdot 3x^2+2\cdot 3x-8=6x \;/\cdot 3$

$2\cdot 9x^2+6\cdot 9x-24=18x$

$18x^2+54x-24=18x$

$18x^2+54x-18x=24$

$18x^2+46x=24$

$\underline{\underline{X=-3}}$

poskus:
$x=(-4)$

$18\cdot 16$
18
+108
288

poskus:
$x=(-3)$

$18\cdot(-3)^2+46\cdot(-3)=24$

$18\cdot 9+46\cdot(-3)=24$

$162-138=24$

$24=24$

$46\cdot 4$
184

$18\cdot 4$
72

$18\cdot 9$
162

$46\cdot 3$
138

162
-138
24

poskus:
$m=1$

$2m^2-12m+18=$

$=2\cdot 1^2-12\cdot 1+18=$

$=2-12+18=$

$=8$

72-92

$\boxed{\text{poskus: } m=3}$

$2\cdot 3^2-12\cdot 3+18=$

$=18-36+18=$

$=36-36=0$

0 je najmanjši rezultat

$39\cdot 39$
117
351
1421

$m=2$

$2\cdot 2^2-12\cdot 2+18=$

$=8-24+18=$

$=-16+18=$

$=2$

1

$m=4$

$2\cdot 4^2-12\cdot 4+18=$

$=32-48+18=$

$32-30=2$

B2

$$\frac{2}{3}mx^2 + 2mx - 8 = 6x$$

$$\frac{2}{3}mx^2 + 2mx - 6x = 8$$

$$2mx^2 + 6mx - 18x = 24$$

$$2m^2 - 12m + 18 =$$

$$= 2(m^2 - 6m + 9) =$$

$$= 2(m-3)^2$$

1

B2

$$\frac{2}{3}mx^2+2mx-8=6x \quad /\cdot 3$$

$$2mx^2+6mx-24=18x \quad /:2$$

$$mx^2+3mx-12=9x$$

$$(m-3)^2\cdot x^2+3\cdot(m-3)^2\cdot x-12=19x$$

$$2m^2-12m+18=$$

$$2m^2-12m=-18 \quad /:2$$

$$m^2-6m=-9$$

$$2m^2-12m+18 \quad /:2$$

$$m^2-6m+9=(m-3)^2$$

1

B_2 $\frac{2}{3} m x^2 + 2mx - 8 = 6x$

$m = \underbrace{2m^2 - 12m + 18}_{-18} <$

-4

1. $2m^2 - 12m + 18 = 0$

$2m^2 - 12m = -18$

$-12m = -18 - 2m^2 \quad /:(-2)$

$6m = 9 + m^2$

$6 \cdot 3 = 9 + 9 (3^2)$?

$m = 3$ ✓ POSKUŠ.

2. ~~$2 \cdot (-1)^2 = -4 - 12 = -18 + 18 = 0$~~

$\frac{2}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}x^2}{1} + 2 \cdot 3x - 8 = 6x$

$2x^2 + 6x - 8 = 6x$

3. $2x^2 + \cancel{6x} - \cancel{6x} = -8$

$2x^2 = -8 \quad /:2$

$x^2 = -4$

$x = \sqrt{-4}$

$\boxed{\cancel{X = -2}}$

B_3 $a = 4{,}1m$ $\quad v_1 = 8{,}2m$

$p = \frac{a \cdot v}{\;} = \frac{4{,}1 \cdot \cancel{8{,}2}}{\;}$ 4,1

B2. $\frac{2}{3}mx^2+2mx-8=6x$

$\frac{2}{3}\cdot 3\cdot x^2+2\cdot 3\cdot x-8=6x$

$\frac{6}{3}x^2+6x-8=6x$

$\frac{6}{3}x^2+6x-6x=8$

$\frac{6}{3}x^2=8$

$x^2=8:\frac{6}{3}$

$x^2=\frac{8}{1}:\frac{6}{3}$

$x^2=\frac{8}{1}\cdot\frac{3}{6}$

$x^2=\frac{24}{6}$

$x^2=4$

$x=\sqrt{4}$

$x=2$

$2m^2-12m+18$

za 1: $2-12+18=8$

za 2: $2\cdot 4-24+18=$
$=8-24+18=2$

za 3: $2\cdot 9-36+18=$
$=18-36+18=0$

za 4: $32-48+18=2$

za 5: $50-60+18=8$

36
-18
18

$m=3$

POSK.

3

O: x je enako 2, ker je m 3.

B2.

$$\frac{2}{3}mx^2+2mx-8=6x$$

$$2m^2-12m+18=(m\sqrt{2}-\sqrt{18})^2$$

ker je to razlika kvadratov, ta vrednost ne mora biti negativna, lahko pa je 0.

$$(m\sqrt{2}-\sqrt{18})^2=0$$

$$m=\sqrt{9}=3$$

$$\frac{2}{3}\cdot 3\cdot x^2+2\cdot 3\cdot x-8=6x$$

$$\frac{6x^2}{3}+6x-8=6x$$

$$2x^2+\cancel{6x}-8=\cancel{6x}$$

$$2x^2=8$$

$$x^2=\frac{8}{2}=4$$

$$x^2=4$$

$$x=\sqrt{4}=2$$

5

B2 $\frac{2}{3}mx^2 + 2mx - 8 = 6x$

$2m^2 - 12m + 18 =$

$= 2(m^2 - 6m + 9) =$

$= 2(m-3)^2 =$

$= 2(3-3)^2 = 0$

Ker je ~~~~ na kvadrat bo najnižja rešitev ča je rezultat kvadrata 0

✓

$m - 3 = 0$

$m = 3$

5

$\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x - 8 = 6x$

$\frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot 1}{\cancel{3} \cdot 1} \cdot x^2 + 6x - 8 = 6x$

$2x^2 - 8 = 6x - 6x$

$2x^2 - 8 = 0$

$2x^2 = 8 \,/ :2$

$x^2 = 4$

$x = 2$

B2 $2m^2 - 12m + 18 = 2(m-3)^2$

$m^2 - 6m + 9$

$2(m-3)^2 = 0$

$m = 3$

KARKOLI NA KVADRAT JE POZITIVNO ŠTEVILO, TORAJ NE MORA BITI MANJŠE OD 0.

$\frac{2}{3}mx^2 + 2mx - 8 = 6x \quad / \cdot 3$

$\cancel{2mx^2 + 6mx - 24 = 18x}$

$\frac{2 \cdot \cancel{3} \cdot x^2}{\cancel{3}} + 2 \cdot 3 \cdot x - 8 = 6x$

$2x^2 + \cancel{6x} - 8 = \cancel{6x}$

$2x^2 - 8 = 0$

$2(x-2)(x+2) = 0$

$\boxed{x_1 = 2 \quad x_2 = -2}$

6

✓

B2

$2m^2 - 12m + 18 \doteq x$

$(m-3)\cdot(2m-6) = x$

$\cancel{2m^2 - 12m = x - 18}$

$\cancel{2m\cdot(m-6) = x-18}$

1) če $m > 3$ $\quad x > 0$

2) če $m < 3$ $\quad x > 0$

3) če $\underline{m = 3}$ $\quad x = 0$

✓

$\frac{2}{3}mx^2 + 2mx - 8 = 6x$

6

$\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}x^2 + 2\cdot 3x - 8 = 6x$

$2x^2 + 6x - 8 = 6x$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

✓

$\cancel{x_1 = 2}$

$\cancel{x_2 = -2}$

$R = \{-2; 2\}$

$$\frac{2}{3}mx^2 + 2mx - 8 = 6x$$

$$\frac{2}{\cancel{3}_1} \cdot \cancel{3}^1 \cdot x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x - 8 = 6x$$

$$2x^2 + 6x - 8 = 6x$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -2$$

✓

$$\mathcal{R} = \{-2, 2\}$$

$$2m^2 - 12m + 18 = (m\sqrt{2} - 3\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2} \cdot (m-3))^2$$

$$\Downarrow$$

$$m = 3$$

6

Kvadrat nekega števila je vedno pozitiven. Zato je najmanjši možni produkt kvadrata nekega števila in pozitivnega števila enak 0. Pri tem mora biti eden od faktorjev enak 0.

✓

B2

$2m^2-12m+18 \doteq x$

$(m-3)\cdot(2m-6)=x$

$\cancel{2m^2-12m=x-18}$

$\cancel{2m\cdot(m-6)=x-18}$

1) če $m>3$ $x>0$

2) če $m<3$ $x>0$

3) če $\underline{m=3}$ $x=0$ ✓

6

$\frac{2}{3}mx^2+2mx-8=6x$

$\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}x^2+2\cdot3x-8=6x$

$2x^2+6x-8=6x$

$2x^2=8$ ✓

$x^2=4$

$\cancel{x_1=2}$

$\cancel{x_2=-2}$

$R=\{-2;2\}$

[redacted]

$2m^2-12m+18$ → najmanjša vrednost

$2m^2-12m+18 = 2(m^2-6m+9) = 2(m-3)^2$ → ker je kvadrat, bo vrednost v oklepaju vedno pozitivna ali enaka 0, zato je najmanjša vrednost 0 pri $(m-3)^2=0$

za realna števila

$\Downarrow$

$m-3=0$

$\boxed{m=3}$

✓

$\frac{2}{3}mx^2+2mx-8=6x$ Vstavimo m

$\frac{2}{3}(3)x^2+2(3)x-8=6x$ preuredimo

$2x^2+6x-8=6x$ $/-6x$

$2x^2=8$ $/:2$

$x^2=4$

$x=\boxed{\pm 2}$

O: x je lahko 2 ali -2.

✓

$\boxed{B2}$

6

Preizkus:

$x=2$

$\frac{2}{3}m(2)^2+2m(2)-8=6(2)$

$\frac{8}{3}m+4m=20$

$\frac{20}{3}m=20$

$m=3$

✓✓

$x=-2$

$\frac{2}{3}m(-2)^2+2m(-2)-8=6(-2)$

$\frac{8}{3}m-4m=-4$

$-\frac{4}{3}m=-4$

$m=3$

✓

$\boxed{B2}$ Since $2m^2 - 12m + 18$ has the smallest possible value, we can rewrite it as $2(m^2 - 6m + 9) = 2(m-3)^2$. Now, let's notice, that for any $x \in R$, $x^2 \geq 0 \Rightarrow (m-3)^2 \geq 0 \Rightarrow 2(m-3)^2 \geq 0 \Rightarrow$ the smallest value is equal to 0, & then $2(m-3)^2 = 0 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow \underline{m = 3}$

✓

Now, let's solve our equation:

$$\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x - 8 = 6x$$

$$2x^2 + 6x - 8 = 6x$$

6

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow \underline{x = \pm 2}.$$

<u>Answer: $x = \pm 2$</u> ✓

2. $\frac{2}{3}mx^2+2mx-8=6x$

1) $2m^2-12m+18=0 \rightarrow$ 0 je res najmanjša možna vrednost tega izraza, ker:

$D=12^2-4\cdot2\cdot18=0 \rightarrow$ obstaja ena rešitev

Ampak, če, naprimer, vzamemo -1 kot najmanjšo vrednost, dobimo!

$D=12^2-4\cdot2\cdot19=144-152=-8 \rightarrow$ ni rešitve te enačbe

2) $2m^2-12m+18=0$

$\downarrow$

$(\sqrt{2}m-\sqrt{18})^2=0$

$\sqrt{2}m=\sqrt{18}$

$m=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{9}=3$

3) Vstavimo m v 1 enačbo!

$\frac{2\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}}x^2+\cancel{2\cdot3x}-\cancel{6x}=8$

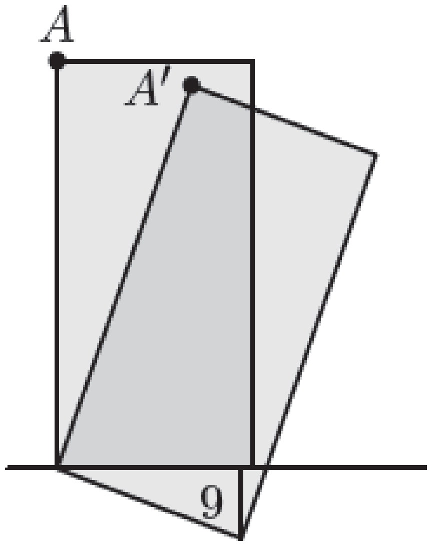
$2x^2=8$

$x^2=4$

$x=\pm\sqrt{4}=\pm2$

Odgovor: x je enak: -2 ali 2

B3. Stolp s pravokotnim prerezom širine $4{,}1$ m in višine $8{,}2$ m se pogrezne v tla za 9 dm (glej sliko). Kako visoko od tal je sedaj njegova najvišja točka A'?



B3

$|BF| = 4,1\ m$

$x^2 = |BF|^2 - 0,9^2$

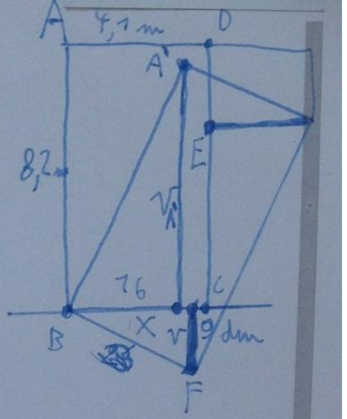
$x^2 = 4,1^2 - 0,9^2$

$x^2 = 16,81\ m^2 - 0,81\ m^2$

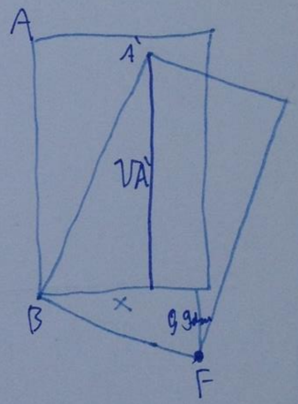
$x^2 = 16\ m^2$

$x = \sqrt{16\ m^2}$

$x = 4\ m$



$VA' \cong x$

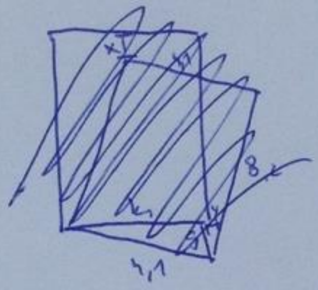


$\frac{8,2 \cdot 4,1}{2} : \frac{8 \cdot 4}{2}$

$VA' =$ ~~2,05 4,025 . 10~~

$\sqrt{196} = 14$

B.3



$k_1^2 = 4,1^2 - 0,9^2$

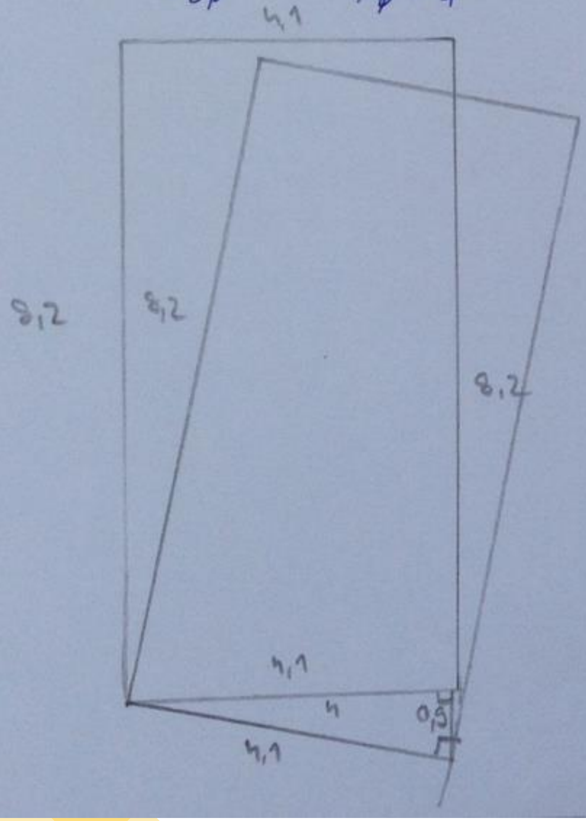
$k_1^2 = 16,81 - 0,81$

$k_1 = \sqrt{16}$

$k_1 = 4$

$$\begin{array}{r} 4,1 \cdot 4,1 \\ \hline 164 \\ 41 \\ \hline 16,81 \end{array}$$

višina je $\underline{8\ m}$ 2 utemeljitev ∀



B 2 ∀

B (3)

Ugotovitve

$a : b = 1 : 2$

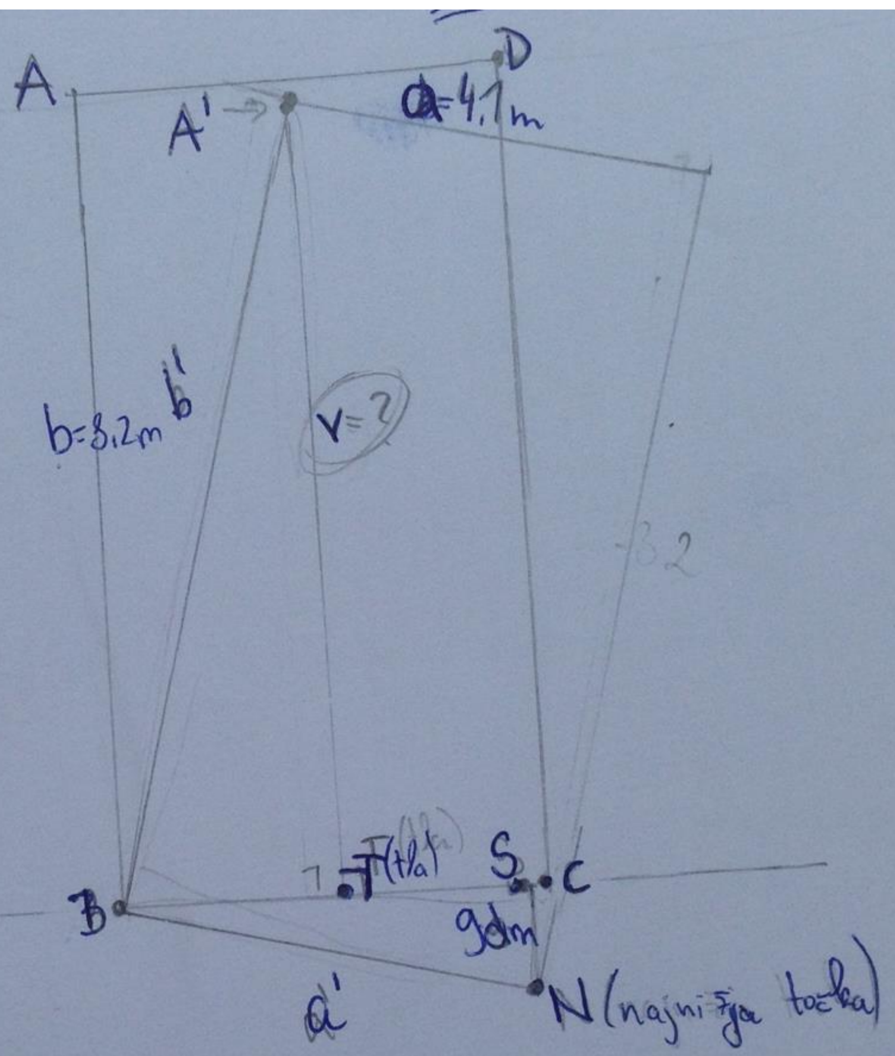
trikotnika

$\Delta A'BT$ in ΔBSN

sta podobna

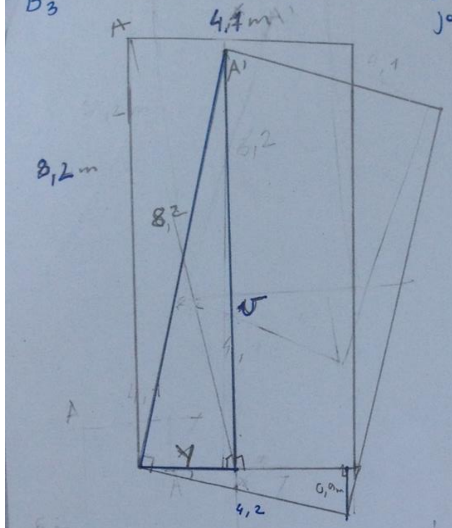
(oba sta pravokotna trikotnika)

$a' : b' = g : v$



B3

Njegova najvišja točka je od tal ~~8 m~~ 8 m visoka.



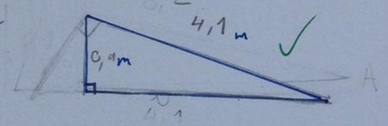
$$4{,}1 \cdot 4{,}1 = 16{,}81$$

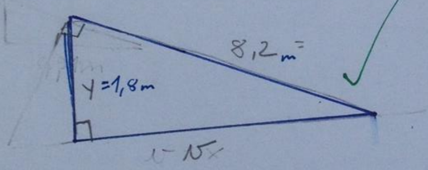
$$\frac{4{,}1}{0{,}9} = \frac{8{,}2}{y}$$

$$4{,}1y = 8{,}2 \cdot 0{,}9$$

$$y = \frac{\cancel{8{,}2} \cdot 0{,}9}{\cancel{4{,}1}}$$

$$y = 1{,}8 \text{ m}$$





Zakaj sta podobna?

$$8{,}2^2 = 67{,}24$$

$$1{,}8 \cdot 1{,}8 = 3{,}24$$

$$8{,}2^2 = v^2 + y^2$$

$$67{,}24 = v^2 + y^2$$

$$v^2 = 67{,}24 - 1{,}8^2$$

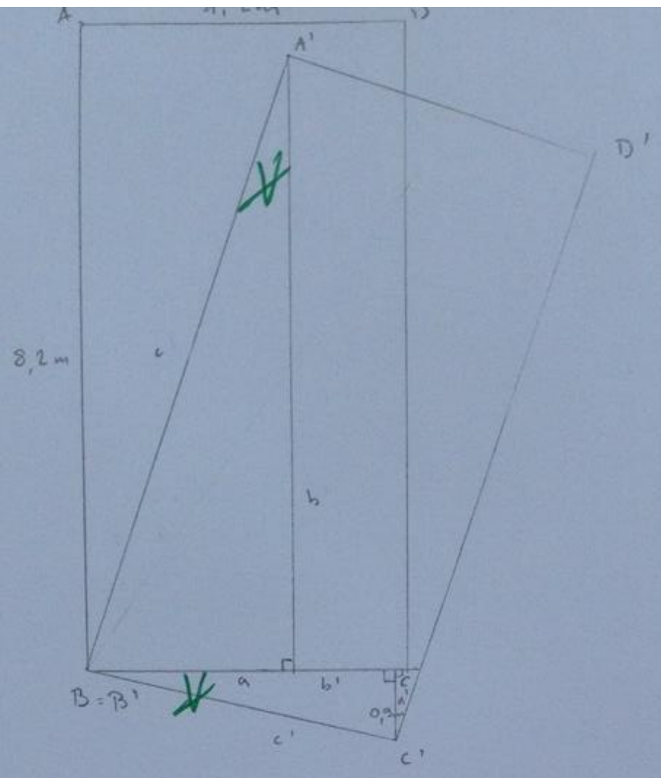
$$v^2 = 67{,}24 - 3{,}24$$

$$67{,}24 - 3{,}24 = 64{,}00$$

$$v = \sqrt{64} = 8 \text{ m}$$

O: A' je 8 m nad tlemi.

B3



~~trikotnik a'b'b~~

trikotnik a'b'c' je pravokotni trikotnik

$b' = \sqrt{c'^2 - a'^2}$

$b' = \sqrt{4,1^2 - 0,9^2}$

$b' = \sqrt{16,81 - 0,81}$

$b' = \sqrt{16}$

~~b' = 4 m~~

b = 4 m

trikotnik a'b'c' in abc sta podobna ZAKAJ?

$b : b' = c : c'$

$b : 4 = 8,2 : 4,1$

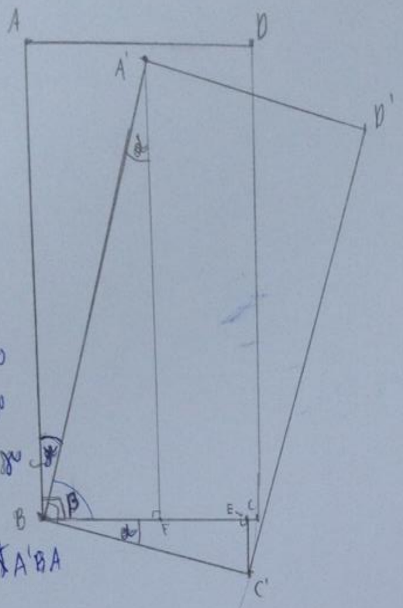
$4,1b = 32,8 \quad / : 4,1$

$b = 8$ m

Točka A' je od tal oddaljena 8 m.

3)

9 dm = 0,9 m



$\gamma + \beta = 90^\circ$

$\alpha + \beta = 90^\circ$

$\Downarrow$

$\alpha = \gamma$

$\Downarrow$

$\sphericalangle C'BE = \sphericalangle A'BA$

pravokotnik ABCD in pravokotnik A'BC'D' sta skladna. $\Rightarrow$

$|AB| = |A'B| = 8{,}2\,m$

$|BC| = |BC'| = 4{,}1\,m$

~~$\triangle BE\ \triangle BC'E$ je pravokotni trikotnik.~~

$\Downarrow$

$\cancel{|BE|^2 + |EC'|^2 = |BC'|^2}$

$\downarrow$

$\cancel{|BE| = \sqrt{|BC'|^2 - |EC'|^2}}$

$|EC'| = 0{,}9\,m$

$|BC'| = 4{,}1\,m$

$|A'B| = 8{,}2\,m$

$\sphericalangle C'BE$ in $\sphericalangle A'BA$ sta skladna.

$\sphericalangle BA'F$ in $\sphericalangle A'BA$ sta skladna.

$\downarrow$ $\sphericalangle C'BE$ in $BA'F$ sta skladna.

$\triangle EBC'$ in $\triangle A'BF$ sta ~~skladna~~ si podobna.

$\downarrow$

$$\frac{|A'F|}{|BA'|} = \frac{|BE|}{|BC'|}$$

$|BA'| = 8{,}2\,m$

$|BC'| = 4{,}1\,m$

$$|A'F| = 2|BE| = \boxed{8\,m}$$

$$|BE| \cdot \frac{|BA'|}{|BC'|} = |BE| \cdot \frac{8{,}2}{4{,}1} = 2|BE|$$

O: A' sega 8m od tal.

$\triangle BC'E$ je pravokoten trikotnik

$\downarrow$

$$|BE|^2 + |EC'|^2 = |BC'|^2$$

$\Downarrow$

$$|BE| = \sqrt{|BC'|^2 - |EC'|^2} = \sqrt{16{,}81 - 0{,}81} = \sqrt{16} = \boxed{4\,m}$$

$\sphericalangle C'BE = \sphericalangle A'BA = \sphericalangle BA'F$

Ker sta AB in A'F vzporedni

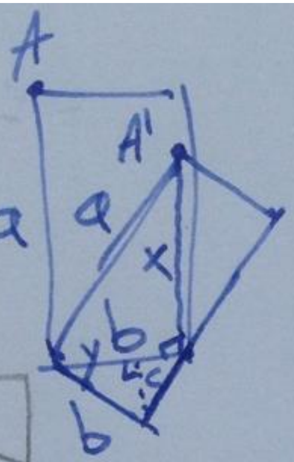
$\downarrow$

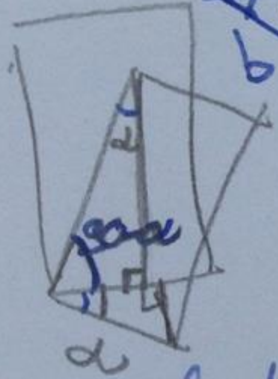
$\sphericalangle A'BA = \sphericalangle BA'F$

drugi izraz enak 0.

B3)

SKICA:





$a = 8{,}2\,m$

$b = 4{,}1\,m$

$c = 0{,}9\,m$

$b : a = c : y$

$y = \frac{ac}{b} = 1{,}8\,m$

Pitagorov izrek:

$a^2 - y^2 = x^2$

$8{,}2^2 - 1{,}8^2 = x^2$

$(8{,}2 - 1{,}8) \cdot (8{,}2 + 1{,}8) = x^2$

$6{,}4 \cdot 10 = 64$

$x = 8\,m$

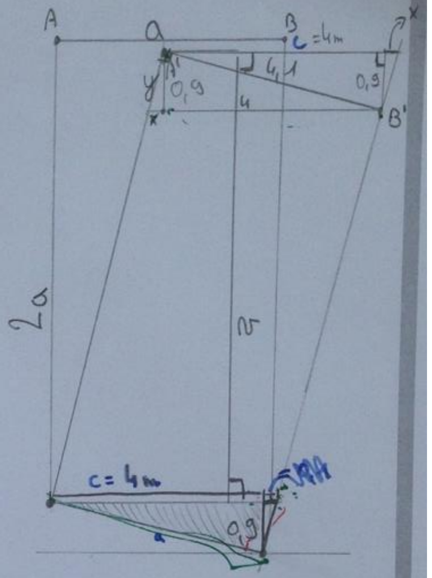
O: A' je 8m nad tlemi.

Trikotnika s stranicama a, y in x ter b, c in y sta si podobna, en kot imata velik $90°$, drugega α, tretji pa je velik $90 - \alpha$.

B3)

$4{,}1\cdot 4{,}1$
164
41
1681

$$\boxed{p = 2a^2 = 2\cdot 4{,}1^2 = 16{,}81\cdot 2 = 33{,}62\ m^2}$$



~~$\Delta v = v_1 - v_2$~~
~~$\Delta v = 8{,}2m - 8m$~~
~~$\Delta v = 0{,}2m$~~

~~$p = a\cdot v$~~
~~$33{,}62 = 4\cdot v$~~
~~$v = \frac{33{,}62}{4}$~~
~~$v = 8$~~

v: Njegova najvišja točka je sedaj le še 8 m nad tlemi

$c^2 = a^2 - 0{,}9^2$
~~$8^2 = \ldots - 0{,}81$~~
$c^2 = 16{,}81 - 0{,}81$
$c^2 = 16$
$c = 4$

1t

$(4+x)^2 - 4{,}1^2 = y^2$
$16 + 8x + x^2 - 16{,}81 = y^2$
$-0{,}81 + 8x + x^2 = y^2$
$y^2 = 0{,}9^2 + x^2$
$-0{,}81 + 8x + x^2 = 0{,}81 + x^2$
$8x = 1{,}62$
$x = 0{,}$

$33{,}62 : 4 = 8{,}405$
16
20

$p = (c + 0{,}2025)\cdot v$
$33{,}62 = 4{,}2025\cdot v$
$v = \frac{33{,}62}{4{,}2025}$
$v = 8\ m$

~~$p = (c + 0{,}1)\cdot v$~~
~~$p = 4{,}1\cdot v$~~
~~$33{,}62\cdot v = p$~~
~~$33{,}62 = v\cdot 4{,}1$~~
~~$v = \frac{33{,}62}{4{,}1}$~~
~~$v =$~~

$33{,}62 : 4{,}2025 = 8$

$1{,}62 : 8 = 0{,}2025$
16
20
40

$4{,}2025\cdot 7$
29,4175

„Kdor išče cilj, bo ostal prazen, ko ga bo dosegel, kdor pa najde pot, bo cilj vedno nosil v sebi.“

Nejc Zaplotnik