Mnogokotniške oblike naravnega števila

Boštjan Kuzman

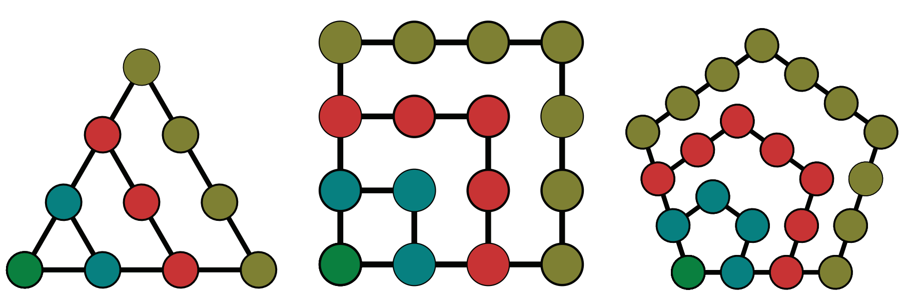
Proučevanje števil s pomočjo razporejanja enakih predmetov v različne geometrijske oblike je verjetno predstavljalo ena od najbolj osnovnih matematičnih aktivnosti starodavnih ljudstev. Trikotniška in kvadratna števila ter njihovo povezavo z vsoto zaporednih naravnih oziroma lihih števil naj bi poznali že pitagorejci v 6. stoletju pred našim štetjem, o splošnejših mnogokotniških številih pa je prvi pisal Nikomah iz Gerase okoli leta 100 našega štetja. Nekatera naravna števila lahko predstavimo na več mnogokotniških načinov – število 36 je denimo hkrati trikotniško in štirikotniško (oziroma kvadratno). V tem prispevku si bomo ogledali postopek, ki danemu naravnemu številu poišče vse njegove mnogokotniške oblike in ga preizkusili na številu 2024.

Naj bo $n \geqslant 3$ naravno število. Potem *k-to n-kotniško število* $P_n(k)$ predstavlja število objektov, razporejenih v pravilni n-kotnik tako, da je na posamezni stranici k objektov. Parametru k v tem primeru rečemo *red* n-kotniškega števila. Poseben primer mnogokotniških števil so trikotniška števila, ki predstavljajo vsoto zaporednih naravnih števil in jih izračunamo po formuli $P_3(k) = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, in štirikotniška oziroma kvadratna števila, ki predstavljajo vsoto zaporednih lihih števil $P_4(k) = 1 + 3 + \ldots + (2k-1) = k^2$.

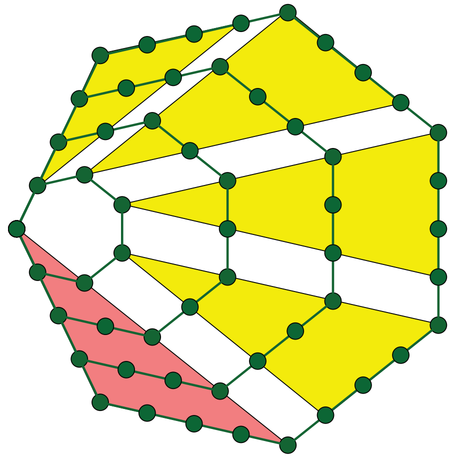
Splošno formulo za $P_n(k)$ najlažje izpeljemo z razrezom mnogokotnika na trikotnike. Za poljuben par n, k lahko ustrezni n-kotnik razrežemo na en trikotnik reda k in $(n-3)$ trikotnike reda $k-1$ (Slika ??), torej je

$$P_n(k) = \frac{k(k+1)}{2} + (n-3)\frac{(k-1)k}{2} = \frac{(n-2)k^2 - (n-4)k}{2}.$$

S preoblikovanjem tega izraza dobimo formulo za n-



SLIKA 1.
Trikotniško število reda 4 je enako 10, štirikotniško število reda 4 je enako 16 in petkotniško število reda 4 je enako 22.



SLIKA 2.
Razrez n-kotniškega števila na trikotniško število reda k in $(n-3)$ trikotniških števil reda $k-1$ za primer $n=7$ in $k=5$.

kotniško število reda k v obliki

- $P_n(k) = \frac{k}{2}\left(2 + (n-2)(k-1)\right).$

S to formulo lahko zdaj izračunamo mnogokotniška števila za dana n in k, denimo $P_7(3) = 18$. Nekaj vrednosti za majhne k in n smo zbrali v Tabeli 1.

Bralka in bralec bosta zdaj zlahka sama preverila, da iz mnogokotniške formule za primera $n = 3$ in 4 dobimo že znani formuli za trikotniška oziroma štirikotniška števila $P_3(k) = k(k+1)/2$ in $P_4(k) = k^2$. Prav tako za vsa števila $n \geqslant 3$ velja tudi, da je $P_n(1) = 1$, saj je prvo n-kotniško število vselej enako 1, in $P_n(2) = n$, torej je vsako n-kotniško število reda 2 kar enako n (z drugimi besedami, vsako naravno število $n \geqslant 3$ je n-kotniško na trivialen način).

Zdaj pa se vrnimo h glavnemu vprašanju iz uvoda: kako za dano naravno število N določiti vse njegove mnogokotniške oblike? Iz dosedanjih ugotovitev in Tabele 1 lahko razberemo, da je število 15 mnogokotniško na (vsaj) 3 načine:

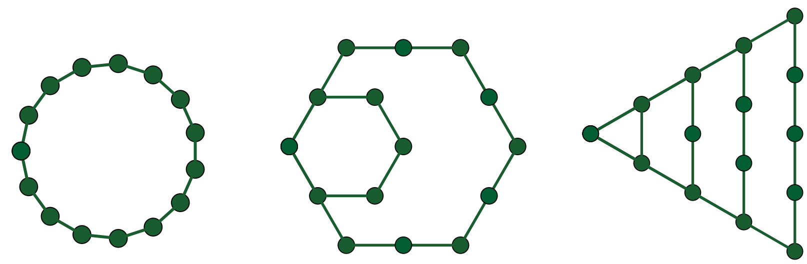
- $15 = P_2(15) = P_3(5) = P_6(3).$

Za vsak izbrani $n \in \mathbb{N}$ se vprašanje, ali je $N = P_n(k)$ za kakšen k, z mnogokotniško formulo prevede na reševanje kvadratne enačbe v neznanki k. Nemški matematik Gustav Wertheim pa je leta 1897 opisal splošen postopek, kako ugotoviti, ali je dano število N mnogokotniško za katerikoli n, in določiti njegovo mnogokotniško obliko $P_n(k)$. Osnova postopka je naslednji izrek.

Izrek: *Naravno število N ima mnogokotniško obliko $P_n(k)$ za neki števili $n \geqslant 3$, $k \geqslant 2$, natanko tedaj, ko je k delitelj števila $2N$ in za naravno število $\ell = \frac{2N}{k}$ velja, da je $\ell > k$ in je $\frac{\ell-2}{k-1}$ naravno število. Tedaj je $n = \frac{\ell-2}{k-1} + 2$.*

	k	1	2	3	4	5	6	7	8
Trikotniško	$P_3(k)$	1	3	6	10	15	21	28	36
Štirikotniško	$P_4(k)$	1	4	9	16	25	36	49	64
Petkotniško	$P_5(k)$	1	5	12	22	35	51	70	92
Šestkotniško	$P_6(k)$	1	6	15	28	45	66	91	120
Sedemkotniško	$P_7(k)$	1	7	18	34	55	81	112	148

TABELA 1.
Rotacija v prvi ravnini pri množenju z i z leve.



SLIKA 3.
Tri mnogokotniške oblike števila 15.

Dokaz. Denimo, da je $N = P_n(k) = \frac{k}{2}(2 + (n-2)(k-1))$ za ustrezni števili n, k. Potem sledi $2N = k\ell$ za $\ell = 2+(n-2)(k-1) \in \mathbb{N}$. Za $n \geqslant 3$ velja $\ell \geqslant 2+1\cdot(k-1) > k$ in izrazimo lahko $n = \frac{\ell-2}{k-1} + 2$, torej mora biti izraz v ulomku celo število. S tem smo preverili, da so vsi pogoji potrebni. V obratno smer razmislimo takole. Denimo, da imamo ustrezni števili k, ℓ kot v izreku. Če vstavimo $n = \frac{\ell-2}{k-1} + 2$ v formulo za $P_n(k)$, po krajšem izračunu dobimo $P_n(k) = N$. □

Izrek nam da preprost algoritem, s katerim lahko določimo vse mnogokotniške oblike danega števila N, če poznamo njegov razcep na prafaktorje. Za vsak delitelj k števila $2N$, tako da je $2 \leqslant k < \sqrt{2N}$, določimo število $\ell = \frac{2N}{k}$ (pogoj $k < \sqrt{2N}$ pomeni, da je $k < \ell$). Če je $\frac{\ell-2}{k-1}$ naravno število, potem je iskano število stranic enako $n = \frac{\ell-2}{k-1} + 2$, sicer pa ustrezna oblika ne obstaja. Vsak par celoštevilskih rešitev (n, k) da mnogokotniško obliko števila $N = P_n(k)$.

Za prvi zgled uporabimo opisani algoritem za število $N = 15$. Velja $2N = 30 = 2\cdot3\cdot5$. Ker je $\sqrt{2N} < 6$, je dovolj preveriti delitelje $k = 2, 3, 5 < 6$ števila $2N$:

- Za $k = 2$ dobimo $\ell = \frac{2N}{k} = 15$. Število $\frac{\ell-2}{k-1} = 13$ je celo in zato je $n = 13 + 2 = 15$ ustrezna rešitev. Našli smo torej trivialno mnogokotniško obliko $15 = P_{15}(2)$.
- Za $k = 3$ dobimo $\ell = 10$ in število $\frac{\ell-2}{k-1} = 4$ je zopet celo. Torej je $n = 6$ in velja $15 = P_6(3)$.
- Za $k = 5$ dobimo še $\ell = 6$ in $n = \frac{\ell-2}{k-1} + 2 = 3$, torej je $15 = P_3(5)$.

Dobili smo natanko tri mnogokotniške oblike števila 15 (Slika 3), ki jih poznamo že od prej.

Za drugi zgled uporabimo opisani algoritem še za število $N = 60$. Potem je $2N = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ in velja $\sqrt{2N} < 11$. V tem primeru so ustrezni delitelji $k = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$. Za vsakega izračunamo ustrezni ℓ ter pogledamo, ali je $\frac{\ell-2}{k-1}$ celo število, nato določimo n. Toda smiselno rešitev najdemo le v dveh primerih, kot kaže Tabela 2.

k	$\ell = 2N/k$	$\frac{\ell-2}{k-1}$	n
2	60	58	60
3	40	19	21
4	30	28/3	/
5	24	22/4	/
6	20	18/5	/
8	15	13/7	/
10	12	10/9	/

TABELA 2.
Uporaba algoritma na številu $N = 60$.

Tako smo preverili, da ima število 60 natanko dve mnogokotniški obliki. Poleg trivialne $P_{60}(2)$ še 21-kotniško $P_{21}(3)$.

Kot smo napovedali na začetku, lahko z uporabo algoritma obravnavamo še letošnjo letnico $2024 = 2^3 \cdot 253$. Izkaže se, da ima natanko dve mnogokotniški obliki. Poleg (trivialne) 2024-kotniške $P_{2024}(2)$ ima še 74-kotniško obliko $P_{74}(8)$. Pravilnost te trditve lahko bralec in bralka preverita sama. Nadobudnim programerjem in programerkam pa prepustimo še zanimivejši izziv: napisati računalniški program, ki bo na osnovi opisanega algoritma določil (in morda celo narisal?) vse mnogokotniške oblike danega števila N.

× × ×