IZDAJA DRUŠTVO MATEMATIKOV, FIZIKOV IN ASTRONOMOV SLOVENIJE

ISSN 0473-7466

2025
Letnik 71
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

OBZORNIK MAT. FIZ. • LJUBLJANA • LETNIK 71 • ŠT. 4 • STR. 121–160 • APRIL 2025

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, MAREC 2025, letnik 71, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** zalozba@dmfa.si **Internet:** http://www.obzornik.si/ **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664 **Mednarodna nakazila:** Nova Ljubljanska banka d.d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBASI2X **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.
Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 150 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 60 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželena velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvorne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov TEX oziroma LATEX, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

Γ-KONVERGENCA

MARTIN JESENKO[1]

[1]Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo[1]
Inštitut za matematiko, fiziko in mehaniko[2]

Math. Subj. Class. (2010): 49J45, 74Q05

V članku je predstavljen koncept Γ-konvergence funkcionalov na metričnem prostoru. Podrobneje je prikazana uporaba te konvergence pri homogenizaciji.

Γ-CONVERGENCE

The topic of this article is Γ-convergence of functionals on a metric space. This concept is then more specifically applied to homogenization.

Uvod

Ena od klasičnih metod reševanja matematičnih problemov je z uporabo variacijskega računa, kjer problemu priredimo funkcional na prostoru dopustnih funkcij, rešitve pa so globalni ekstremi tega funkcionala. Najpogosteje gre za integralske funkcionale. V inženirskem jeziku bi lahko rekli, da pripadajoči funkcional podaja energijo posameznega možnega stanja, naša naloga pa je poiskati njene ravnovesne lege.

V praksi pogosto upravičeno domnevamo oziroma nam eksperimenti pokažejo, da imajo določeni variacijski problemi podobne rešitve. Vprašamo se, kako iz pripadajočih funkcionalov prepoznamo to dejstvo. Natančneje: denimo, da imamo zaporedje funkcionalov na prostoru dopustnih funkcij. V katerem smislu mora to zaporedje konvergirati k nekemu funkcionalu, da bodo ekstremi členov zaporedja konvergirali k ekstremom limitnega funkcionala?

Za primeren koncept se je izkazala *Γ-konvergenca*, ki jo je v sedemdesetih letih prejšnjega stoletja uvedel italijanski matematik Ennio De Giorgi. S takim problemom se je srečal pri vprašanju homogenizacije v okviru študiju materialov. Knjiga [6] vsebuje njegov življenjepis ter povzetek njegovega bogatega znanstvenega dela, med drugim tudi ozadje in njegov prispevek na področju homogenizacije. Njegovo idejo bomo zelo na kratko orisali v nadaljevanju.

[1]Jamova cesta 2, SI-1000 Ljubljana
[2]Jadranska ulica 19, SI-1000 Ljubljana

Dan imamo neki material v referenčnem (neobremenjenem) položaju. Želimo vedeti, kaj se z njim zgodi, če deformiramo njegov rob. Iščemo torej funkcijo, ki nam podaja pomik poljubne točke materiala pri danih pomikih na robu. V variacijski formulaciji nam pripadajoči funkcional za dopustno funkcijo pomika dá elastično energijo materiala pri tej deformaciji. Gre za integralski funkcional, katerega gostota v posamezni točki je odvisna od lastnosti materiala v tej točki ter od gradienta pomika. Rešitev je tista dopustna funkcija, pri kateri je elastična energija minimalna.

Lastnosti materiala se na splošno dejansko razlikujejo od točke do točke. Vendarle pa narava vsaj do neke mere tvori precej pravilne oblike in vzorce, kar ima za posledico določeno periodično strukturo. Po drugi strani pa je npr. pri kompozitih periodična struktura umetno ustvarjena, da le-ti dosegajo želene lastnosti, kot so trdnost, prevodnost, odpornost ipd.

Tako v naravnih materialih kot v umetnih kompozitih se parametri spreminjajo od točke do točke praviloma na precej majhni (mikroskopski) ravni glede na dimenzije opazovanega sredstva. Vendar pa uporabnikov ne zanimajo vrednosti parametrov v vsaki točki posebej, temveč potrebujejo efektivne lastnosti materialov (npr. Youngov modul in Poissonovo število, natezno trdnost, prevodnost itd.) ob uporabi na makroskopski ravni. Na tej ravni si lahko mislimo, da imamo opravka s *homogenim* materialom, to je s takim, katerega lastnosti so povsod enake. Seveda je treba pokazati, da je tak homogen model dober približek za dejanski material, če so dimenzije opazovanega sredstva velike v primerjavi z velikostjo periode. Eden od načinov za to utemeljitev je z uporabo Γ-konvergence. Nekaj rezultatov s tega področja bomo navedli v zadnjem razdelku.

Načrt tega prispevka je naslednji: Njegovo jedro predstavljajo trije razdelki, ki so posvečeni Γ-konvergenci. Niso vezani na določeno aplikacijo in zahtevajo le osnovno matematično predznanje. Najprej bomo predstavili direktno metodo variacijskega računa kot osnovno metodo dokazovanja obstoja rešitev variacijskih problemov, nato pa definirali Γ-konvergenco ter si ogledali njene bistvene lastnosti. K uporabi se bomo vrnili v zadnjem razdelku, kjer bomo na kratko predstavili nekaj rezultatov s področja homogenizacije.

Uvod sklenimo z nekaj besedami izumitelja Γ-konvergence: *„Matematik more črpati navdih iz zelo različnih virov: iz fizike, inženirskih strok, umetnosti, ekonomije, prava, filozofije. Ne obstaja oblika znanosti, iz katere ne bi mogel črpati navdiha. Celo precej enostavni in dolgo časa znani pojavi so lahko vir navdiha za originalna dela.“*

1. Direktna metoda variacijskega računa

V tem razdelku si oglejmo *direktno metodo variacijskega računa*, s katero dokažemo obstoj globalnih ekstremov funkcionala in s tem rešljivost variacijskega problema. Dodajmo še pojasnilo glede imena: Pri tej metodi neposredno dokazujemo obstoj globalnih ekstremov, medtem ko znane Euler-Lagrangeeve enačbe določajo potrebne lastnosti ekstrema v obliki diferencialne enačbe, nam pa ne zagotavljajo njegovega obstoja.

Osredotočili se bomo na iskanje minimumov. Čeprav imamo v mislih integralske funkcionale, bomo teoretične osnove pojasnili na poljubnih funkcijah na metričnih prostorih. Vseskozi v tem prispevku bo izraz funkcija pomeni preslikavo z vrednostmi v $[-\infty, \infty]$. Omejili se bomo na metrične prostore, čeprav je možno (in pogosto tudi smiselno) dopustiti kot definicijsko območje splošen topološki prostor z morda kakimi dodatnimi lastnostmi.

Če f doseže svoj minimum (lahko tudi $\pm\infty$), bomo točke, kjer je dosežen, imenovali *minimalne točke. Minimizirajoče zaporedje* za f pa je vsako zaporedje $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, za katerega velja

$$\lim_{j\to\infty} f(x_j) = \inf f.$$

Da bo problem rešljiv, je smiselno predpostaviti sledečo lastnost funkcije:

Definicija 1. Funkcija f na metričnem prostoru (M, d) je *koercitivna*, če je za vsak $t \in \mathbb{R}$ praslika $f^{-1}((-\infty, t])$ vsebovana v neki kompaktni množici K_t. Družina funkcij je *enakomerno koercitivna*, če so za vsak t vse pripadajoče praslike družine vsebovane v neki kompaktni množici K_t.

Če imamo opravka s koercitivno funkcijo, potem nam minimizirajoče zaporedje ne more „pobegniti v neskončnost“, saj leži v kompaktni množici. Zagotovo torej vsebuje konvergentno podzaporedje. Da bo limita le-tega minimalna točka, je ključna naslednja lastnost:

Definicija 2. Funkcija f na metričnem prostoru (M, d) je *navzdol polzvezna* v točki $x \in M$, če za vsako zaporedje $x_j \to x$ velja

$$\liminf_{j\to\infty} f(x_j) \geq f(x).$$

Hitro se lahko prepričamo, da je funkcija f v točki x navzdol polzvezna natanko tedaj, ko je

$$f(x) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \inf_U f.$$

Z $\mathcal{N}(x)$ bomo označevali družino vseh odprtih okolic točke x, z $B_r(x)$ pa odprte krogle s središčem v x in polmerom r. Zgoraj in v vseh nadaljnjih pojavitvah pa je možno $\mathcal{N}(x)$ zamenjati s katero koli bazo okolic $\mathcal{B}(x)$ točke x. Kot običajno je funkcija navzdol polzvezna na neki množici, če je taka v vsakem elementu te množice. Direktno metodo variacijskega računa povzema naslednji izrek:

Izrek 3. *Naj bo f navzdol polzvezna in koercitivna funkcija na metričnem prostoru (M, d). Potem velja:*

1. *f doseže svoj minimum.*
2. *Vsako stekališče poljubnega minimizirajočega zaporedje je minimalna točka f.*
3. *Če $f \not\equiv +\infty$, potem ima vsako minimizirajoče zaporedje stekališče.*

Dokaz. Če je $f \equiv +\infty$, očitno (a) in (b) veljata.

Predpostavimo zato $f \not\equiv +\infty$. Naj bo $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ minimizirajoče zaporedje za f. Iz koercitivnosti sledi, da leži (od nekega člena dalje) v kompaktni podmnožici M, iz česar sledi obstoj stekališča. Označimo z x poljubno stekališče in $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ podzaporedje, ki konvergira proti x. Potem je

$$f(x) \leq \liminf_{k\to\infty} f(x_{j_k}) = \lim_{j\to\infty} f(x_j) = \inf_M f.$$

Torej je minimum res dosežen, in sicer v vseh stekališčih.

Če funkcija ni navzdol polzvezna, potem morda ne doseže svojega minimuma, tudi če je koercitivna. Kaj se dá storiti v tem primeru? Najprej definirajmo njeno navzdol polzvezno ogrinjačo:

Definicija 4. Naj bo f funkcija na metričnem prostoru (M, d). Njena *navzdol polzvezna ogrinjača* je

$$\operatorname{lsc} f := \sup\{g : g \leq f \text{ in } g \text{ navzdol polzvezna na } M\}.$$

Trditev 5. *Velja formula*

$$(\operatorname{lsc} f)(x) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \inf_U f.$$

Dokaz. Označimo s $h(x)$ desno stran v zgornji formuli in najprej pokažimo, da je tako definirana funkcija h navzdol polzvezna. Očitno je $h \leq f$.

Naj bo $x \in M$. Za poljubna $U \in \mathcal{N}(x)$ in $y \in U$ velja

$$h(y) = \sup_{V \in \mathcal{N}(y)} \inf_V f \geq \inf_U f.$$

Posledično je

$$\inf_U h = \inf_U f \quad \text{in} \quad \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_U h = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_U f = h(x).$$

Funkcija h je torej res navzdol polzvezna.

Če je g navzdol polzvezna funkcija z $g \leq f$, potem je

$$g(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_U g \leq \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \inf_U f = h(x).$$

Torej $h = \operatorname{lsc} f$.

V naslednji trditvi podajamo klasifikacijo ogrinjače z zaporedji:

Trditev 6. *Navzdol polzvezna ogrinjača je natančno določena z naslednjima lastnostma:*

- *Za vsako zaporedje* $x_j \to x$ *velja* $\liminf_{j\to\infty} f(x_j) \geq (\operatorname{lsc} f)(x)$.
- *Obstaja zaporedje* $x_j \to x$, *za katerega je* $\limsup_{j\to\infty} f(x_j) \leq (\operatorname{lsc} f)(x)$.

Dokaz. Vzemimo poljuben $x \in M$. Če za vsak $j \in \mathbb{N}$ izberemo tak $x_j \in B_{1/j}(x)$, da je $f(x_j) < \inf_{B_{1/j}(x)} f + \frac{i}{j}$, potem $x_j \to x$ in, ker je $\mathcal{B}(x) = \{B_{1/j}(x) : j \in \mathbb{N}\}$ bazo okolic,

$$(\operatorname{lsc} f)(x) = \sup_{j \in \mathbb{N}} \inf_{B_{1/j}(x)} f = \lim_{j\to\infty} \inf_{B_{1/j}(x)} f = \lim_{j\to\infty} f(x_j).$$

Prva lastnost pa je očitno posledica polzveznosti $\operatorname{lsc} f$.

Zamenjavi funkcije z njeno navzdol polzvezno ogrinjačo pri iskanju minimalnih točk se običajno reče *relaksacija problema.* Povezavo med njima podaja naslednji izrek:

Izrek 7. *Naj bo f koercitivna funkcija na metričnem prostoru (M, d).*

1. *Ogrinjača* $\operatorname{lsc} f$ *je koercitivna in navzdol polzvezna.*
2. $\operatorname{lsc} f$ *doseže svoj minimum in* $\min_M \operatorname{lsc} f = \inf_M f$.

3. *Vsako stekališče poljubnega minimizirajočega zaporedje za f je minimalna točka* $\operatorname{lsc} f$.

4. *Vsaka minimalna točka za* $\operatorname{lsc} f$ *je limita nekega minimizirajočega zaporedje za* f.

Dokaz. Ker za vsak $s \in \mathbb{R}$ velja

$$\{x \in M : \operatorname{lsc} f(x) \leq s\} = \bigcap_{t>s} \overline{\{x \in M : f(x) \leq t\}},$$

je funkcija $\operatorname{lsc} f$ koercitivna. Drugo sledi iz zgornjih rezultatov.

Z relaksacijo torej dobimo rešljiv problem. A bistvena je povezava obeh. Poudarimo, da je minimum relaksiranega problema enak infimumu prvotnega. In še bolj pomembno: če določimo minimalne točke relaksiranega problema, potem vemo, da prvotna funkcija v njihovi bližini doseže najmanjše vrednosti.

2. Definicija Γ-konvergence

Sedaj se lotimo definicije Γ-konvergence. Omenimo le tri vire v bogati ponudbi: G. Dal Maso obravnava v knjigi [5] to področje zelo sistematično in natančno za splošen topološki prostor, medtem ko nudita [2, 7] krajši uvod za metrične prostore, ki mu sledijo tipični primeri uporabe.

Trditev 8. *Na metričnem prostoru* (M, d) *naj bo dano zaporedje funkcij* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$. *Za poljubna* $x \in M$ *in* $\lambda \in [-\infty, \infty]$ *so ekvivalentne naslednje trditve:*

1. $\lambda = \inf \left\{ \liminf_{j\to\infty} f_j(x_j) : x_j \to x \right\}$.

2. *Za poljubno zaporedje* $x_j \to x$ *velja* $\liminf_{j\to\infty} f_j(x_j) \geq \lambda$, *obstaja pa zaporedje* $x_j \to x$, *za katerega je* $\liminf_{j\to\infty} f_j(x_j) = \lambda$.

3. $\lambda = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \left(\liminf_{j\to\infty} \ \inf_U f_j \right)$.

Prav tako so ekvivalentne tudi trditve, kjer je lim inf *zamenjan z* lim sup.

Točka (b) v bistvu pove, da je infimum v točki (a) dosežen. Očitno lahko v točki (c) spet vzamemo supremum le po neki bazi okolic $\mathcal{B}(x)$ točke x. Dokaz trditve najdemo npr. v [3, Proposition 7.5].

Definicija 9. Na metričnem prostoru (M, d) naj bo dano zaporedje funkcij $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Za poljuben $x \in M$ definiramo Γ-lim inf in Γ-lim sup kot

$$\Gamma\text{-}\liminf_{j\to\infty} f_j(x) := \inf\left\{ \liminf_{j\to\infty} f_j(x_j) : x_j \to x \right\},$$
$$\Gamma\text{-}\limsup_{j\to\infty} f_j(x) := \inf\left\{ \limsup_{j\to\infty} f_j(x_j) : x_j \to x \right\}.$$

Če sta obe vrednosti enaki $\lambda \in [-\infty, \infty]$, potem rečemo, da je λ *Γ-limita* zaporedja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ v točki x in pišemo

$$\lambda = \Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j(x).$$

Zaporedje $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *Γ-konvergira* proti funkciji f_∞ natanko tedaj, ko za vsak $x \in M$ velja

$$\Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f_\infty(x).$$

Opomba 10. Očitno je $\lambda = \Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ natanko tedaj, ko velja:

- Za vsako zaporedje $x_j \to x$ je izpolnjena t. i. *liminf-neenakost* $\liminf_{j\to\infty} f_j(x_j) \geq \lambda$.
- Obstaja *povrnitveno zaporedje* (angl. *recovery sequence*), to je zaporedje $x_j \to x$, za katerega je $\limsup_{j\to\infty} f_j(x_j) \leq \lambda$.

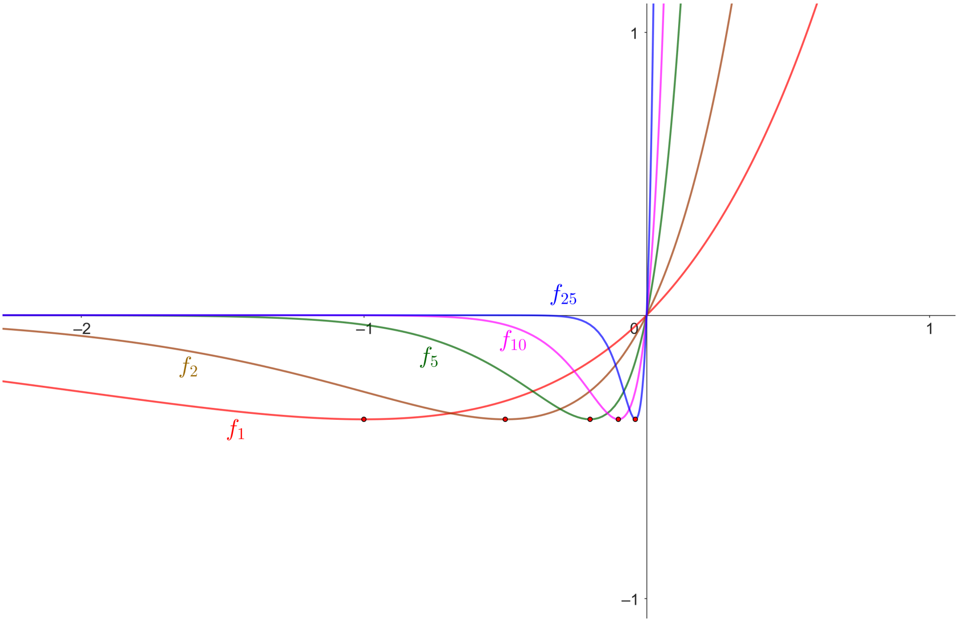
V tej obliki definicijo Γ-konvergence tudi najpogosteje srečamo v literaturi. Opazimo še, da po trditvi 6 konstantno zaporedje vselej konvergira k navzdol polzvezni ogrinjači.

Za vtis o lastnostih pravkar definirane konvergence si oglejmo dva preprosta primera na realni osi ([5, Example 4.4]).

Zgled 11. Naj bo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := xe^x$. Zaporedje $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ definiramo z $f_j(x) := f(jx)$. Nekaj grafov teh funkcij je skiciranih na sliki 1. Za poljuben $x \neq 0$ in vsako zaporedje $x_j \to x$ velja

$$\lim_{j\to\infty} f_j(x_j) = \lim_{j\to\infty} f(jx_j) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \infty, & x > 0. \end{cases}$$

Za $x \neq 0$ torej limita po točkah (če dopuščamo limito ∞) in Γ-limita sovpadata.



Slika 1. Grafi funkcij f_1, f_2, f_5, f_{10} in f_{25} z označenimi minimumi.

Funkcija f ima globalni minimum $-e^{-1}$, ki ga zavzame pri -1. Zagotovo je torej za vsako zaporedje $x_j \to 0$

$$\liminf_{j\to\infty} f_j(x_j) = \liminf_{j\to\infty} f(jx_j) \geq -e^{-1}.$$

To vrednost pa dosežemo s povrnitvenim zaporedjem $-\frac{1}{j} \to 0$, saj je

$$\lim_{j\to\infty} f_j(-\tfrac{1}{j}) = \lim_{j\to\infty} f(-1) = -e^{-1}.$$

Torej imamo

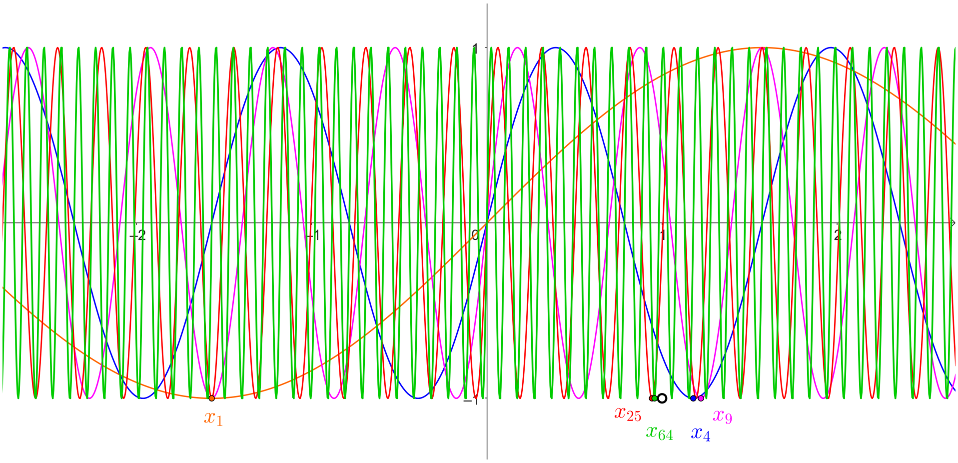
$$\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \infty, & x > 0, \end{cases} \quad \text{in} \quad \Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ -e^{-1} & x = 0, \\ \infty, & x > 0. \end{cases}$$

Zgled 12. Definirajmo $f_j\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_j(x) = \sin(jx)$. Limita po točkah obstaja le na množici $\mathbb{Z}\pi$, kjer je enaka 0. Po drugi strani pa očitno za vsak x in vsako zaporedje $x_j \to x$ velja

$$\liminf_{j\to\infty} f_j(x_j) = \liminf_{j\to\infty} \sin(jx_j) \geq -1.$$

Če za vsak $j \in \mathbb{N}$ za x_j iz množice $\{\frac{\pi}{2j}(4k-1) : k \in \mathbb{N}\}$ vseh minimalnih točk funkcije f_j vzamemo element, ki je najbližje x, glej sliko 2, potem zagotovo velja $|x_j - x| \leq \frac{\pi}{j}$. Torej velja $x_j \to x$ in za vsak $j \in \mathbb{N}$ je $f_j(x_j) = -1$. Tako je Γ-limita za vsak $x \in \mathbb{R}$

$$\Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j(x) = -1.$$



Slika 2. Na sliki so grafi funkcij f_j in pripadajoči x_j za $j = 1, 4, 9, 25, 64$, če je $x = 1$.

3. Lastnosti Γ-konvergence

Oglejmo si nekaj osnovnih lastnosti Γ-konvergence.

Trditev 13. *Vsaka Γ-limita je navzdol polzvezna.*

Dokaz. Naj bo f_∞ Γ-limita zaporedja funkcij $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ na metričnem prostoru (M, d). Vzemimo poljuben $x \in M$ in poljubno zaporedje $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, ki konvergira proti x. Po definiciji Γ-konvergence za vsak $j \in \mathbb{N}$ obstaja zaporedje $(x_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$, tako da

$$\lim_{k\to\infty} x_j^k = x_j \quad \text{in} \quad \lim_{k\to\infty} f_j(x_j^k) = f_\infty(x_j).$$

Definirajmo $\sigma_0 := 0$ in induktivno

$$\sigma_j := \min\{k > \sigma_{j-1} : d(x_j^k, x_j) \leq \tfrac{1}{j}, |f_j(x_j^k) - f_\infty(x_j)| \leq \tfrac{1}{j}\}.$$

Zaporedje $(x_j^{\sigma_j})_{j\in\mathbb{N}}$ po definiciji konvergira proti x. Tedaj iz definicije Γ-konvergence in iz zgornjega izbora σ_j sledi

$$f_\infty(x) \leq \liminf_{j\to\infty} f_j(x_j^{\sigma_j}) \leq \liminf_{j\to\infty} f_\infty(x_j),$$

kar pa ravno dokazuje navzdol polzveznost v točki x.

Ta rezultat pomeni, da imamo lahko tudi zaporedje funkcij, ki ne dosežejo minimuma, a če Γ-konvergira in je Γ-limita koercitivna, potem limitna funkcija po izreku 3 zagotovo doseže svoj minimum. Površno povedano, dobimo rešljiv problem iz nerešljivih problemov. K temu se bomo vrnili še v izreku 19.

Opomba 14. Omenimo še, da velja bolj splošno: Za poljubno zaporedje funkcij $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ sta tudi funkciji

$$x \mapsto \Gamma\text{-}\liminf_{j\to\infty} f_j(x) \quad \text{in} \quad x \mapsto \Gamma\text{-}\limsup_{j\to\infty} f_j(x)$$

navzdol polzvezni.

Γ-konvergenca ima Urisonovo lastnost:

Izrek 15. *Naj bo $\lambda \in [-\infty, \infty]$ in $x \in M$. Potem je $\lambda = \Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j(x)$ natanko tedaj, ko vsako podzaporedje $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ vsebuje nadaljnje podzaporedje $(f_{j_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$, tako da $\lambda = \Gamma\text{-}\lim_{l\to\infty} f_{j_{k_l}}(x)$.*

Dokaz. Pokazati moramo implikacijo v levo. Denimo, da velja $\lambda \neq \Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j(x)$. To se zgodi natanko tedaj, ko

$$\lambda < \Gamma\text{-}\limsup_{j\to\infty} f_j(x) \quad \text{ali} \quad \lambda > \Gamma\text{-}\liminf_{j\to\infty} f_j(x).$$

V prvem primeru po trditvi 8 obstaja $U_0 \in \mathcal{N}(x)$, tako da je

$$\lambda < \limsup_{j\to\infty} \inf_{U_0} f_j.$$

Vzemimo podzaporedje $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, vzdolž katerega je dosežen ta limes superior. Za vsako njegovo podzaporedje $(f_{j_{k_l}})_{j\in\mathbb{N}}$ velja

$$\begin{aligned}\Gamma\text{-}\liminf_{l\to\infty} f_{j_{k_l}}(x) &\geq \Gamma\text{-}\liminf_{k\to\infty} f_{j_k}(x) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \liminf_{k\to\infty} \inf_U f_{j_k} \\ &\geq \liminf_{k\to\infty} \inf_{U_0} f_{j_k} > \lambda.\end{aligned}$$

V drugem primeru moremo po trditvi 8 izbrati zaporedje $x_j \to x$, tako da bo

$$\Gamma\text{-}\liminf_{j\to\infty} f_j(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x_j).$$

Če je vzdolž $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dosežen limes inferior, potem za vsako njegovo podzaporedje $(f_{j_{k_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ velja

$$\lambda > \Gamma\text{-}\liminf_{j\to\infty} f_j(x) = \liminf_{j\to\infty} f_j(x_j) = \lim_{k\to\infty} f_{j_k}(x_{j_k}) \geq \limsup_{l\to\infty} f_{j_{k_l}}(x_{j_{k_l}}).$$

V obeh primerih torej obstaja tako podzaporedje $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, da nobeno njegovo podzaporedje v točki x ni Γ-konvergentno proti λ.

V določenih primerih vemo, da dano zaporedje Γ-konvergira. To smo že opazili za konstantno zaporedje. Zadošča tudi enakomerna konvergenca:

Trditev 16. *Če zaporedje funkcij $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ na metričnem prostoru (M,d) enakomerno konvergira k funkciji f, potem Γ-konvergira k* $\operatorname{lsc} f$.

Dokaz. Iz enakomerne konvergence sledi

$$\liminf_{j\to\infty} \inf_U f_j = \limsup_{j\to\infty} \inf_U f_j = \inf_U f$$

za vsako odprto množico U. Če v zgornji dvojni enakosti izračunamo supremum po vseh $U \in \mathcal{N}(x)$, dobimo po trditvah 5 in 8

$$\Gamma\text{-}\liminf_{j\to\infty} f_j(x) = \Gamma\text{-}\limsup_{j\to\infty} f_j(x) = (\operatorname{lsc} f)(x).$$

Monotonost je prav tako zadosten pogoj:

Trditev 17. *Monotona zaporedja funkcij vselej Γ-konvergirajo: Če je $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$*

1. *nenaraščajoče, potem je*

$$\Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j = \operatorname{lsc}\Big(\lim_{j\to\infty} f_j\Big) = \operatorname{lsc}\Big(\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j\Big),$$

2. *nepadajoče, pa je*

$$\Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j = \lim_{j\to\infty}\Big(\operatorname{lsc} f_j\Big) = \sup_{j\in\mathbb{N}}\Big(\operatorname{lsc} f_j\Big).$$

Dokaz. V obeh primerih za vsako odprto množico U obstaja

$$\lim_{j\to\infty} \inf_U f_j,$$

kar že zagotavlja Γ-konvergenco. Limito v x dobimo kot supremum tega izraza po vseh $U \in \mathcal{N}(x)$. Za nenaraščajoče zaporedje je

$$\Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \Big(\inf_{j\in\mathbb{N}} \inf_U f_j\Big) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \inf_U \Big(\inf_{j\in\mathbb{N}} f_j\Big) = \Big(\operatorname{lsc} \inf_{j\in\mathbb{N}} f_j\Big)(x),$$

za nepadajoče pa

$$\Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j(x) = \sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \Big(\sup_{j\in\mathbb{N}} \inf_U f_j\Big) = \sup_{j\in\mathbb{N}} \Big(\sup_{U\in\mathcal{N}(x)} \inf_U f_j\Big) = \sup_{j\in\mathbb{N}} (\operatorname{lsc} f_j)(x).$$

Če se nekoliko omejimo pri definicijskem območju, potem vselej najdemo vsaj Γ-konvergentno podzaporedje:

Izrek 18. *Na separabilnem metričnem prostoru vsako zaporedje funkcij vsebuje Γ-konvergentno podzaporedje.*

Dokaz. Naj bo (M, d) separabilen metrični prostor in $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ poljubno zaporedje funkcij na M. V izoliranih točkah pojma Γ-konvergence in konvergence po točkah sovpadata. Izberimo števno bazo odprtih množic $\mathcal{B} = \{U_i : i \in \mathbb{N}\}$. (Privzamemo, da imamo netrivialen primer, ko M ni končen.)

Za vsak $i \in \mathbb{N}$ vsebuje zaporedje $(t^i_j)_{j\in\mathbb{N}}$, pri čemer je

$$t^i_j := \inf_{U_i} f_j \in [-\infty, \infty],$$

konvergentno podzaporedje (z $\pm\infty$ kot dopustnima limitama). Z diagonalnim argumentom najdemo podzaporedje naravnih števil $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$, tako da $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{U_i} f_{j_k}$ obstaja za vse $i \in \mathbb{N}$.

Vzemimo poljuben $x \in M$ in definirajmo

$$\mathcal{B}(x) := \{U \in \mathcal{B} : x \in U\} \quad \text{in} \quad f_\infty(x) := \sup_{U\in\mathcal{B}(x)} \lim_{k\to\infty} \inf_U f_{j_k}.$$

Iz

$$f_\infty(x) = \sup_{U\in\mathcal{B}(x)} \liminf_{k\to\infty} \inf_U f_{j_k} = \sup_{U\in\mathcal{B}(x)} \limsup_{k\to\infty} \inf_U f_{j_k}$$

po trditvi 8 sledi, da zaporedje $(f_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ Γ-konvergira proti f_∞.

Bistveno lastnost za variacijski račun povzema naslednji izrek:

Izrek 19. *Naj zaporedje navzdol omejenih funkcij $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ na metričnem prostoru (M,d) Γ-konvergira k funkciji f_∞ in naj bo $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ zaporedje skoraj minimalnih točk, tj.*

$$\lim_{j\to\infty}\left(f_j(x_j)-\inf_M f_j\right)=0.$$

Če je x_∞ stekališče $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$, potem zavzame f_∞ svoj minimum v x_∞ in velja

$$\min_M f_\infty = f_\infty(x_\infty)=\limsup_{j\to\infty} f_j(x_j)=\limsup_{j\to\infty}\inf_M f_j.$$

Če pa velja celo $x_j\to x_\infty$, potem je

$$\min_M f_\infty = f_\infty(x_\infty)=\lim_{j\to\infty} f_j(x_j)=\lim_{j\to\infty}\inf_M f_j.$$

Dokaz. Po trditvi 8 je za vsak $x\in M$

$$\limsup_{j\to\infty}\inf_M f_j \le \sup_{U\in\mathcal{N}(x)}\left(\limsup_{j\to\infty}\ \inf_U f_j\right)=\Gamma\text{-}\limsup_{j\to\infty} f_j(x)=f_\infty(x).$$

Torej

$$\limsup_{j\to\infty}\inf_M f_j\le\inf_M f_\infty.$$

Izberimo podzaporedje $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ki konvergira proti x_∞ in za katerega je $f_{j_k}(x_{j_k})$ konvergentno. Sestavimo zaporedje $(\tilde{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$, tako da v zaporedju $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ elemente z indeksi, ki niso v zaporedju $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$, nadomestimo z x_∞. Potem $\tilde{x}_j\to x_\infty$, zato iz definicije Γ-konvergence sledi

$$\begin{aligned}\inf_M f_\infty &\le f_\infty(x_\infty)\le\liminf_{j\to\infty} f_j(\tilde{x}_j)\le\liminf_{k\to\infty} f_{j_k}(x_{j_k})\le\limsup_{j\to\infty} f_j(x_j)\\ &=\limsup_{j\to\infty}\inf_M f_j.\end{aligned}$$

Če združimo dobljene neenakosti, dobimo

$$\limsup_{j\to\infty}\inf_M f_j\le\inf_M f_\infty\le f_\infty(x_\infty)=\limsup_{j\to\infty}\inf_M f_j,$$

torej smo pokazali prvi del trditve. Če $x_j\to\infty$, ni treba definirati pomožnega zaporedja $(\tilde{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in dobimo

$$\inf_M f_\infty\le\liminf_{j\to\infty} f_j(x_j)=\liminf_{j\to\infty}\inf_M f_j,$$

iz česar sledi trditev.

Opomba 20. Poudarimo, kaj ta izrek pomeni za variacijsko nalogo. Če

$$\Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j = f_\infty,$$

potem f_∞ zagotovo ima minimalne točke, če le obstaja kako kompaktno zaporedje skoraj minimalnih točk za $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$. To bo zagotovo res, če so $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ enakomerno koercitivne. Zadostuje tudi že, če obstaja kompaktna množica K z $\inf_M f_j = \inf_K f_j$ za vse $j \in \mathbb{N}$.

Kompaktnost zaporedja skoraj minimalnih točk pa je na splošno potreben pogoj, saj ni težko najti protiprimera ([5, Example 7.5]):

Zgled 21. Zaporedje

$$f_j(x) := \tfrac{(x+j)^2}{j^2}$$

enakomerno po kompaktih konvergira proti konstanti 1. Torej je

$$\Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} f_j = 1.$$

Vendar pa $\min_{\mathbb{R}} f_j = 0$ in $\min_{\mathbb{R}} 1 = 1$.

4. Homogenizacija

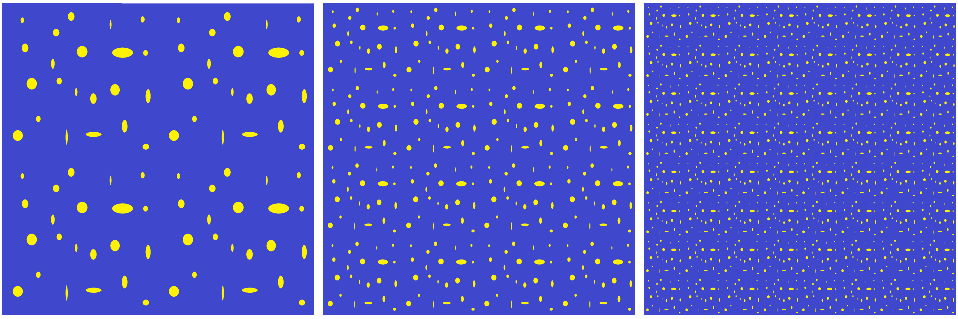
Potem ko smo definirali Γ-konvergenco in spoznali njene lastnosti, smo dobili občutek, v kakšnih situacijah bi to orodje utegnilo biti koristno. Področja uporabe so res številna, predvsem v numeričnih problemih in v problemih iz tehnike. Tu se bomo osredotočili le na homogenizacijo, s katero se je razvoj začel, ter na hitro skicirali najbolj osnovne rezultate s tega področja, ki so bili dokazani na ta način.

Knjiga [4] je klasična referenca za obširno in matematično rigorozno obravnavo elastičnega obnašanja materialov. Imejmo hiperelastičen material, kar pomeni, da lahko njegovo elastično energijo zapišemo v integralski obliki, ravnovesna stanja pa so njene minimalne točke. Če je material homogen, imamo torej opravka s funkcionalom

$$y \mapsto \int_\Omega f(\nabla y(x))\,dx,$$

pri čemer je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ njegov referenčni (začetni) položaj, iskana funkcija $y\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ pa določa njegovo deformacijo. Naravno je, da imamo predpisane robne pogoje.

Če pa imamo nehomogen material, se njegove lastnosti razlikujejo od točke do točke. Gostota f je torej odvisna tudi od spremenljivke x. Denimo,



Slika 3. Na sliki je možen kompozit iz dveh homogenih materialov. Če je za kos na prvi sliki še pričakovati pomemben učinek nehomogenosti, potem pričakujemo, da bo z večanjem dimenzije njen učinek na makroskopski ravni postajal zanemarljiv.

da ima material kubično periodično strukturo, pri čemer naj bo $\varepsilon \ll 1$ dolžina periode. To lahko upoštevamo na naslednji način: Gostota integrala f naj bo $\mathbb{I}^n$-periodična v prvi spremenljivki ($\mathbb{I} := (0,1)$ je enotski interval), položaj točke pa ustrezno reskalirajmo. Tako dobimo funkcional

$$\mathcal{F}_\varepsilon(y) = \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla y(x)\right)\, dx$$

za dopustno deformacijo y. Na ta način imamo ε-periodičnost v koordinatnih smereh v prvi spremenljivki. Naš cilj dobiti dober efektiven model za $\varepsilon \to 0$. Pri tem v bistvu nimamo v mislih zmanjševanja periode, ampak da so dimenzije opazovanega dela velike v primerjavi s periodično celico, kot je prikazano na sliki 3. Za zgoraj opisano družino funkcionalov velja:

Izrek 22. *Naj bo $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ Carathéodoryjeva funkcija, ki*

- *ima standardno p-rast za neki $p > 1$ in*
- *je $\mathbb{I}^n$-periodična v prvi spremenljivki.*

Naj bo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ omejeno Lipschitzevo območje. Za vsak $\varepsilon > 0$ definiramo integralski funkcional $\mathcal{F}_\varepsilon\colon L^p(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ kot

$$\mathcal{F}_\varepsilon(y) := \begin{cases} \int_\Omega f(\frac{x}{\varepsilon}, \nabla y(x))\, dx, & y \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m), \\ \infty, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Potem

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F}_{\mathrm{hom}} \quad \textit{v prostoru } L^p(\Omega;\mathbb{R}^m),$$

pri čemer je $\mathcal{F}_{\mathrm{hom}}\colon L^p(\Omega;\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ definiran kot

$$\mathcal{F}_{\mathrm{hom}}(y) = \begin{cases} \int_\Omega f_{\mathrm{hom}}(\nabla y(x))\, dx, & y \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m), \\ \infty, & \textit{sicer.} \end{cases}$$

Homogenizirano gostoto določata ekvivalentni formuli

$$
\begin{aligned}
f_{\mathrm{hom}}(X) &= \lim_{t\to\infty} \inf \left\{ \frac{1}{t^n} \int_{(0,t)^n} f(x, X + \nabla\varphi(x))\, dx : \varphi \in W_0^{1,p}((0,t)^n; \mathbb{R}^m) \right\} \\
&= \inf_{k\in\mathbb{N}} \inf \left\{ \frac{1}{k^n} \int_{k\mathbb{I}^n} f(x, X + \nabla\varphi(x))\, dx : \varphi \in W_0^{1,p}(k\mathbb{I}^n; \mathbb{R}^m) \right\}.
\end{aligned}
$$

Ta izrek nam dá teoretično podlago za prehod od dejanskega nehomogenega k pripadajočemu homogenemu modelu skupaj s formulo za gostoto.

Opomba 23. Pojasnimo še nekaj standardnih pojmov iz tega področja, ki nastopajo v izreku.

1. Funkcija $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ je *Carathéodoryjeva*, če je

   - $f(x, \_)$ zvezna za skoraj vsak $x \in \Omega$ in
   - $f(\_, X)$ (Lebesgueovo) merljiva za vsak $X \in \mathbb{R}^N$.

   Ta lastnost je zadostna za to, da so zgornji integrali sploh dobro definirani. Namreč, če je $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ Carathéodoryjeva in je $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ merljiva, je kompozitum $x \mapsto f(x, u(x))$ merljiv.

2. Funkcija $f\colon \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ima *standardno p-rast*, če obstajata taka $\alpha, \beta > 0$, da velja

   $$\alpha|X|^p - \beta \le f(x, X) \le \beta(|X|^p + 1)$$

   za skoraj vse $x \in \mathbb{R}^n$ in vse $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

3. $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ je prostor Soboljeva enkrat šibko odvedljivih funkcij nad $L^p(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Z $W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ označujemo zaprtje $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{R}^m)$ v njem.

4. V primeru zveznih vrednosti indeksa je Γ-konvergenca definirana kot Γ-konvergenca po vseh zaporedjih proti limitni točki. Torej

   $$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_\varepsilon = \mathcal{F}_{\mathrm{hom}} \iff \Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} \mathcal{F}_{\varepsilon_j} = \mathcal{F}_{\mathrm{hom}} \quad \forall(\varepsilon_j \searrow 0).$$

Ta rezultat sta sredi osemdesetih dokazala A. Braides v [1] in S. Müller v [11]. Knjiga [3] je posvečena prav tem problemom. Če je f konveksna v drugi spremenljivki, se formula poenostavi v

$$f_{\mathrm{hom}}(X) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{I}^n} f(x, X + \nabla\varphi(x))\, dx : \varphi \in W_0^{1,p}(\mathbb{I}^n; \mathbb{R}^m) \right\},$$

kar je pokazal P. Marcellini v [9] že leta 1978.

Naravno se postavlja vprašanje in tudi primeri iz prakse terjajo razmislek, ali je možno predpostavke o rasti in periodičnosti gostote omiliti. Kot primer navedimo *nestandardno rast* (glej [3, Chapter 21]) ali *skoraj periodične funkcije* (glej [3, Chapter 15]). Periodičnost lahko posplošimo tudi z uvedbo slučajnih integralskih funkcionalov, ki so periodični v porazdelitvi in ergodični. Tedaj gre za *stohastično homogenizacijo* (glej [10]).

Zaključimo še z rezultatoma, pri katerih je sodeloval tudi avtor. Namesto iskanja zadostnih pogojev za homogenizacijo lahko poskušamo poiskati skupne lastnosti funkcij, ki privedejo do homogenega funkcionala. Zato definirajmo:

Definicija 24. Naj bo $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ Carathéodoryjeva funkcija s standardno p-rastjo. Potem rečemo, da je f *homogenizabilna*, če obstaja zvezna funkcija $f_{\mathrm{hom}}\colon \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$, da

$$\mathcal{F}_{\mathrm{hom}}(\_, U) = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{F}_\varepsilon(\_, U)$$

za vsako odprto omejeno območje $U \subset \mathbb{R}^n$, pri čemer so zgornji funkcionali za $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ definirani z

$$\mathcal{F}_\varepsilon(u,U) := \int_U f(\tfrac{x}{\varepsilon}, \nabla u(x))\, dx \quad \text{in} \quad \mathcal{F}_{\mathrm{hom}}(u,U) := \int_U f_{\mathrm{hom}}(\nabla u(x))\, dx,$$

in so enaki ∞ sicer na $L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Izkaže se, da za vse homogenizabilne funkcije f velja formula za f_{hom} iz izreka 22, glej [8, Proposition 3.8]. (Dejansko je splošnejša zaradi poljubnosti območja U.)

Trditev 25. *Naj bo $f\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}$ Carathéodoryjeva funkcija s standardno p-rastjo. Če je homogenizabilna, potem velja*

$$f_{\mathrm{hom}}(X) = \lim_{t\to\infty} \inf \left\{ \frac{1}{t^n|U|} \int_{tU} f(x, X + \nabla\varphi(x))\, dx : \varphi \in W_0^{1,p}(tU;\mathbb{R}^m) \right\}$$

za vsako omejeno območje $U \subset \mathbb{R}^n$.

Nadalje se vprašamo, ali se homogenizabilnost podeduje pri neki konvergenci in če se, pri kateri. Odgovor na to najdemo v [8, Theorem 3.5]:

Izrek 26. *Imejmo družino Carathéodoryjevih funkcij*

$$\{f^{(j)}\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}, \quad j \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}\}$$

s standardno p-rastjo (z istima α in β). Denimo, da

- *je za vsak (končen) $j \in \mathbb{N}$ funkcija $f^{(j)}$ homogenizabilna,*
- *za vsak $R > 0$*

$$\lim_{j\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^n} \int_{(-T,T)^n} \sup_{|X|\le R} |f^{(j)}(x,X) - f^{(\infty)}(x,X)| \, dx = 0.$$

Potem je tudi $f^{(\infty)}$ homogenizabilna in za vsak $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ velja

$$f^{(\infty)}_{\mathrm{hom}}(X) = \lim_{j\to\infty} f^{(j)}_{\mathrm{hom}}(X).$$

Opisno povedano je zadosten pogoj enakomerna konvergenca po kompaktih v drugi spremenljivki v povprečju glede na prvo spremenljivko.

Avtor je bil deležen podpore v okviru raziskovalnega programa P1-0222 ARIS.

LITERATURA

[1] A. Braides. Homogenization of some almost periodic coercive functional. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5)*, 9(1):313–321, 1985.

[2] A. Braides. *Γ-convergence for beginners*, volume 22 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications.* Oxford University Press, Oxford, 2002.

[3] A. Braides and A. Defranceschi. *Homogenization of multiple integrals*, volume 12 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications.* The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.

[4] P. G. Ciarlet. *Mathematical elasticity. Volume I. Three-dimensional elasticity*, volume 20 of *Studies in Mathematics and its Applications.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.

[5] G. Dal Maso. *An introduction to Γ-convergence*, volume 8 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications.* Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.

[6] E. De Giorgi. *Selected papers.* Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[7] M. Focardi. Γ-convergence: a tool to investigate physical phenomena across scales. *Math. Methods Appl. Sci.*, 35(14):1613–1658, 2012.

[8] M. Jesenko and B. Schmidt. Closure and commutability results for Γ-limits and the geometric linearization and homogenization of multiwell energy functionals. *SIAM J. Math. Anal.*, 46(4):2525–2553, 2014.

[9] P. Marcellini. Periodic solutions and homogenization of nonlinear variational problems. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 117:139–152, 1978.

[10] K. Messaoudi and G. Michaille. Stochastic homogenization of nonconvex integral functionals. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.*, 28(3):329–356, 1994.

[11] S. Müller. Homogenization of nonconvex integral functionals and cellular elastic materials. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 99(3):189–212, 1987.

RELATIVNOST, HITROST SVETLOBE IN MAXWELLOVE ENAČBE

MARTIN ČOPIČ[1,2]

[1]Institut "Jožef Stefan", Ljubljana
[2]Fakulteta za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani

Ključne besede: relativnost, Lorentzova transformacija, hitrost svetlobe

Iz zahtev, da so vsi inercialni sistemi enakovredni in da sta prostor in čas homogena, sledi Lorentzova transformacija in prostor Minkovskega. Princip najmanjše akcije da enačbe gibanja s poljem, ki ga določajo Maxwellove enačbe, iz katerih sledi tudi hitrost svetlobe.

RELATIVITY, SPEED OF LIGHT, AND MAXWELL EQUATIONS

The postulate that all inertial systems are equivalent and that space and time are homogeneous lead to Lorentz transformation and Minkovski space. The principle of least action gives equations of motion with a field, governed by Maxwell's equations that determine the speed of light.

1. Uvod

Posebna teorija relativnosti, ki jo je Einstein objavil leta 1905, je začetek revolucije v fiziki 20. stoletja in je nepogrešljiva osnova za obravnavo pojavov pri velikih hitrostih in energijah ali kadar je potrebna velika natančnost. Običajno se jo uvede z Einsteinovima postulatoma, da morajo biti zakoni fizike v vseh inercialnih opazovalnih sistemih enake oblike (to velja že od Galileja) in da je hitrost svetlobe v vseh sistemih enaka [1]. Iz teh dveh zahtev že sledi, da se fizikalni zakoni iz enega opazovalnega sistema v drugega prevedejo z Lorentzovo transformacijo, kar te fizikalne zakone naprej določa. V tem članku želim pokazati, da drugi postulat niti ni potreben in da je Lorentzovo transformacijo mogoče dobiti iz splošnejših predpostavk, iz katerih slede ne le hitrost svetlobe, temveč tudi enačbe elektromagnetnega polja.

Poiščimo najprej transformacijo, ki prevede enačbe iz enega inercialnega, to je nepospešenega, sistema v drugega, ki se glede na prvega giblje enakomerno v smeri x. Prva zahteva je, da so vsi sistemi enakovredni in so zato zakoni enake oblike. Druga predpostavka pa je, da je prostor povsod enak, to je homogen, zato so zakoni neodvisni od premika v kraju. Zahtevamo tudi neodvisnost od premika v času. To dvoje zagotavlja, da je transformacija linearna.

Naj se sistem s črtanimi koordinatami giblje glede na nečrtan sistem z majhno hitrostjo v. Tedaj velja Galilejeva transformacija

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z. \tag{1}$$

V predrelativistični fiziki je veljalo, da je čas absoluten, torej neodvisen od opazovalnega sistema. Vendar na primer dejstvo, da nestabilni delci v letu z veliko hitrostjo razpadajo počasneje kot v mirovanju [1], tega ne podpira, zato dovolimo, da se pri prehodu iz enega sistema v drugega transformira tudi čas. Videli bomo, da je ta korak ključen.

$$t' = t + \alpha v x. \tag{2}$$

Parameter α je gotovo majhen in ga bomo lahko določili na podlagi eksperimentov. Zaradi enostavnosti se najprej omejimo le na eno prostorsko koordinato in jo združimo s časom v dvokomponentni vektor (t, x). Takemu paru recimo dogodek. V črtanem sistemu je

$$(t', x') = (I + Av)(t, x) = L(v)(t, x), \tag{3}$$

kjer smo z L označili transformacijsko matriko, z I enotno matriko, z A pa matriko

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -\alpha \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Imejmo sedaj tri sisteme. Ker so vsi sistemi enakovredni, mora veljati

$$L(v_{13}) = L(v_{12}) L(v_{23}), \tag{5}$$

kjer so v_{ij} komponente hitrosti sistema j glede na sistem i. Obratno transformacijo dobimo tako, da obrnemo smer hitrosti:

$$L^{-1}(v) = L(-v). \tag{6}$$

Iskana transformacija tvori grupo z elementi, ki so odvisni od zveznega parametra v, in je primer Liejevih grup.

Doslej zapisano velja za majhne hitrosti. Videli bomo, da je pri večjih hitrostih bolj primeren drug parameter, imenujmo ga ξ, ki je za majhne hitrosti enak v. Transformacijo za poljubno vrednost lahko dobimo kot limito produkta mnogih transformacij za majhne hitrosti:

$$L(\xi) = \lim_{n\to\infty} L(\xi/n)^n = \lim_{n\to\infty} (I + A\xi/n)^n = \exp(A\xi) = \sum (A\xi)^k/k!. \tag{7}$$

Uporabili smo znan izraz za eksponentno funkcijo in njen razvoj v potenčno vrsto. To je prav lahko izračunati. Velja

$$A^2 = \alpha I, \ldots A^{2n} = \alpha^n I, \qquad A^{2n+1} = \alpha^n A, \tag{8}$$

tako da je

$$\begin{aligned} \exp(A\xi) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^{2j}}{(2j)!}\alpha^j I - \alpha^{-1/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\xi^{2j+1}}{(2j+1)!}\alpha^{j+1/2} A = & (9)\\ &= I\cosh(\sqrt{\alpha}\xi) - A\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sinh(\sqrt{\alpha}\xi). & (10) \end{aligned}$$

Definirajmo še

$$\sqrt{\alpha} = 1/c. \tag{11}$$

Konstanta c ima očitno enoto hitrosti. Tako smo dobili transformacijo za vsak ξ v smeri x

$$L(\xi) = \left\| \begin{array}{cc} \cosh(\xi/c) & -1/c\sinh(\xi/c) \\ -c\sinh(\xi/c) & \cosh(\xi/c) \end{array} \right\|. \tag{12}$$

Več o strukturi Lorentzove grupe lahko bralec najde na primer v [2].

Ugotovimo še, kakšni hitrosti gibanja črtanega sistema glede na nečrtanega ustreza ta transformacija. Vzemimo delec, ki v črtanem sistemu miruje. Ker je $dx' = 0$, je

$$dt = dt'\cosh(\xi/c), dx = cdt'\sinh(\xi/c). \tag{13}$$

Tako je hitrost črtanega sistema

$$v = \frac{dx}{dt} = c\tanh(\xi/c). \tag{14}$$

Vedno je manjša od c. Drugače rečeno, za delec, ki v nekem sistemu miruje, hitrost, večja od c, ne obstaja. To ni nekakšna prepoved, temveč je lastnost prostora.

Poglejmo še, kako se izražajo bolj običajni parametri Lorentzove transformacije:

$$\cosh(\xi/c) = \frac{1}{\sqrt{q-(v/c)^2}} = \gamma \qquad \tanh(\xi/c) = \frac{v}{c} = \beta. \tag{15}$$

V trirazsežnem prostoru je razdalja med dvema točkama $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ skalar, to je invarianta, neodvisna od izbire koordinatnega sistema. Podobno lahko razmik med dvema dogodkoma definiramo z izrazom

$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2$, za katerega hitro vidimo, da je neobčutljiv na Lorentzovo transformacijo, tako da je invarianta:

$$\begin{aligned} ds'^2 &= c^2dt^2\cosh^2(\xi/c) + dx^2\sinh^2(\xi/c) - c^2dt^2\sinh^2(\xi/c) - && (16)\\ &- dx^2\cosh^2(\xi/c) = (c^2dt^2)(\cosh^2(\xi/c) - \sinh^2(\xi/c)) = && (17)\\ &= c^2dt^2 - dx^2. && (18) \end{aligned}$$

Če je $ds^2 > 0$, pravimo, da je razmik časovnega tipa in lahko povezuje dogodka, ki sta vzročno povezana. S tem lahko definiramo lastni čas $\tau \equiv ds/c$, to je čas v sistemu, v katerem delec miruje. Lastni čas je tudi skalar, to je invarianta.

Dodajmo še preostali dve dimenziji, tako da imamo dogodke kot štirirazsežne vektorje *četverce*

$$(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = x^\mu, \quad \mu \mathrm{od0do3}, \tag{19}$$

kjer naj zadnji zapis z grškim indeksom vedno pomeni četverec. Štirirazsežnemu prostor-času pravimo prostor Minkovskega.

Četvercu lahko priredimo skalar z uvedbo dualnega četverca s spodnjimi indeksi, ki ima krajevni del nasprotno predznačen

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3). \tag{20}$$

S tem vpeljemo skalarni produkt četvercev

$$x^\mu x_\mu = (x^0x_0 + x^1x_1 + x^2x_2 + x^3x_3) = ((x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2), \tag{21}$$

ki je invarianten (skalar). Uvedli smo še pravilo seštevanja po ponovljenem zgornjem in spodnjem indeksu.

Odvod četverca kraja po lastnem času da četverec relativistične hitrosti

$$\frac{dx^{mu}}{d\tau} = \dot{x}^\mu = u^\mu = (u^0, u^1, u^2, u^3). \tag{22}$$

Velja

$$u^0 = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = c\gamma, \quad u^i = \gamma v^i. \tag{23}$$

Za majhne v je krajevni del običajna hitrost, časovni pa konstanta c. Skalarni produkt četverca hitrosti je vedno enak

$$u^\mu u_\mu = c^2. \tag{24}$$

Krivulja časovnega tipa v prostoru Minkovskega lahko predstavlja delec. Pripišimo delcu skalarno *lastnost maso* m in jo pomnožimo s četvercem hitrosti. S tem dobimo četverec gibalne količine in energije.

$$mu^\mu = p^\mu. \tag{25}$$

Časovna komponenta je sorazmerna s polno energijo in da za majhne hitrosti poleg mirovne energije nerelativistični izraz za kinetično energijo:

$$p^0 = \frac{W}{c} = \frac{mc}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \tilde{=} mc\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{za} \quad v \ll c, \tag{26}$$

krajevni del (latinski indeks i=1..3) pa s faktorjem γ popravljeno gibalno količino

$$p = \gamma m v^i. \tag{27}$$

Invariantni kvadrat da zvezo med energijo in gibalno količino

$$\frac{W^2}{c^2} - p^2 = mc^2 \Rightarrow W = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}. \tag{28}$$

V fiziki nas zanima gibanje delcev pod medsebojnim vplivom. V klasični fiziki lahko enačbe gibanja dobimo iz principa najmanjše akcije, ki pravi, da se delci gibljejo tako, da je *akcija* (S) – integral Lagrangeeve funkcije (L) po času – najmanjša [2, 3]. Akcija in Lagrangeeva funkcija sta skalarja, torej neodvisni od koordinatnega sistema. L je funkcija koordinat in hitrosti delca. Privzemimo, da to velja tudi v relativističnem primeru, pri čemer integriramo L po lastnem času delca, ki je skalar:

$$S = \int L(x^\mu, \dot{x}^\mu) d\tau. \tag{29}$$

Da bo S najmanjša, mora biti njena variacija po koordinatah enaka 0:

$$\frac{\delta S}{\delta x^\mu} = 0. \tag{30}$$

Za prost delec, to je izoliran v praznem prostoru, je primerna akcija

$$L_0 = m\sqrt{\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu}, \tag{31}$$

po kateri se delec giblje enakomerno po premici. V klasični fiziki lahko vpliv okolice na delec v preprostem primeru popišemo s skalarno potencialno funkcijo. Poskusimo enako v relativističnem primeru:

$$L = L_0 + \phi(x). \tag{32}$$

L ni odvisna od lastnega časa. Zato je po izreku Emi Noether [3]

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{c}^{\mu}} = p^{\mu}, \qquad p^{\mu}\dot{x}_{\mu} - L = konst. \tag{33}$$

Na ekstremali velja tudi zveza 24 in je

$$p^{\mu}\dot{x}_{\mu} = mc. \tag{34}$$

Sledi torej, da je ϕ lahko le konstanta in ne more vplivati na gibanje delcev. Namesto tega lahko poskusimo s potencialom $A^{\mu}(x^{\mu})$, ki je četverec. Z njim lahko tvorimo skalar z množenjem s hitrostjo in je Lagrangeeva funkcija

$$L = L_0 + eA^{\mu}\dot{x}_{\mu}. \tag{35}$$

Konstanta e podaja jakost sklopitve. Variacija akcije je

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S}{\delta x_{\mu}} &= \int \frac{m\dot{x}^{\mu}}{\sqrt{\dot{x}^{\nu}\dot{x}_{\nu}}}\delta\dot{x}_{\mu} + eA^{\mu}\delta\dot{x}_{\mu} + \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}}\dot{x}_{\nu}\delta x_{\mu} d\tau = & (36)\\
&= \int \left(-\frac{m}{c}\ddot{x}^{\mu} - e\frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}} + e\frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}}\dot{x}_{\nu}\right)\delta x_{\mu} d\tau = 0. & (37)
\end{aligned}$$

V drugi vrstici smo prva dva člena integrirali per partes in upoštevali, da je A posredno odvisen od lastnega časa in da velja pogoj 24. Ker mora 36 veljati za vsako variacijo, mora biti izraz v oklepaju enak 0 in je enačba gibanja

$$-m\ddot{x}^{\mu} + eF^{\mu\nu}\dot{x}_{\nu} = 0. \tag{38}$$

Pri tem je polje F antisimetrični tenzor

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A^{\mu}}{\partial x_{\nu}}, \tag{39}$$

ki se izraža enako kot tenzor elektromagnetnega polja. Zanj veljajo zveze

$$F^{0i} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial t}\right) = -\frac{1}{c}E_i. \tag{40}$$

$$\frac{\partial A^i}{\partial x_j} - \frac{\partial A^j}{\partial x_i} = (\nabla \times A)_k = B_k. \tag{41}$$

Iz gibalne enačbe 38 preberemo še, da je e naboj in je relativistična sila, pravimo ji tudi sila Minkovskega:

$$f^{\mu} = eF^{\nu\mu}\dot{x}_{\nu}, \tag{42}$$

kjer je časovna komponenta moč električne sile, krajevni del pa Lorentzova sila:

$$f^0 = \gamma \frac{eE \cdot v}{c}, \quad f = eF^{ji}\dot{x}_j = e\gamma(E + v \times B)_i. \tag{43}$$

Preostane nam še, da ugotovimo izvor in enačbe polja F. Za izvore polja vzemimo nabite delce, le tako dobimo zaključen sistem enačb polja in delcev. Vpeljimo ρ kot gostoto naboja v sistemu, kjer delci mirujejo. Pomnožimo jo s hitrostjo delcev, da dobimo gostoto toka

$$j^\mu = \rho \dot{x}^\mu. \tag{44}$$

Izhajamo iz načela najmanjše akcije, za kar potrebujemo Lagrangeevo funkcijo polja, sklopljenega z delci. Tvorimo lahko skalarja

$$j^\mu A_\mu \quad \text{in} \quad F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{45}$$

in je najpreprostejša Lagrangeeva funkcija

$$L_{EM} = j^\mu A_\mu + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{46}$$

L_{EM} je skalarno polje, ki se razteza po vsem prostoru, zato dobimo akcijo z integracijo po vsem prostoru Minkovskega:

$$S_{EM} = \int L_{EM} d^4x. \tag{47}$$

Variacijo iščemo po komponentah potenciala A

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S_{EM} n}{\delta A_\mu} &= \int (j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\delta F_{\mu\nu}) d^4x = && (48)\\
&= \int (j^\mu \delta A_\mu + \frac{1}{2}F^{\mu\nu}\left(\frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu}\right)) d^4x = && (49)\\
&= \int (j^\mu \delta A_\mu + F^{\mu\nu}\frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu}) d^4x = && (50)\\
&= \int (j^\mu \delta A_\mu - \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu}\delta A_\nu) d^4x = 0. && (51)
\end{aligned}$$

Pri prehodu iz druge v tretjo vrstico smo upoštevali, da je F antisimetričen. Drugi člen v tretji vrstici smo integrirali per partes (uporabili Stokesov izrek), da smo dobili četrto vrstico. Ker mora biti variacija akcije 0 za poljubne δA, dobimo enačbe polja

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = j^\nu. \tag{52}$$

Z uporabo (35) in (36) se zlahka prepričamo, da sta to s četverci zapisani nehomogeni Maxwellovi enačbi. Homogeni enačbi sta le identiteti, ki sledita iz antisimetričnosti F. Potencial A ni povsem določen. Polje je neobčutljivo na *umeritvene transformacije*

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mu}}, \tag{53}$$

kjer je Ψ poljubna skalarna funkcija. Zato lahko izberemo umeritev, pri kateri je $\frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\nu = 0$. S tem imamo iz (43) v praznem prostoru brez izvorov

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} A^{\mu} = 0 \tag{54}$$

ali zapisano malo drugače

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A^{\mu}}{\partial t^2} - \nabla^2 A^{\mu} = 0. \tag{55}$$

To je valovna enačba, ki opisuje motnjo, ki se širi v prostoru s hitrostjo c. Potujoči valovi elektromagnetnega polja so seveda svetloba in je c hitrost svetlobe v praznem prostoru.

Ozrimo se po prehojeni poti. Iz zahtev, da morajo biti vsi inercialni sistemi enakovredni in da sta prostor in čas homogena, sledi, da je prehod med sistemi dan z Lorentzovo transformacijo, v kateri nastopa konstanta c, ki je tudi največja možna običajna hitrost. Kot osnovno načelo dinamike smo vzeli zahtevo po minimalni akciji, iz katere smo kot najenostavnejšo možnost dobili enačbo gibanja in Maxwellove enačbe v jeziku četvercev. Iz njih sledi tudi, da je c ravno hitrost svetlobe. Einsteinova zahteva, da je hitrost svetlobe za vse opazovalce enaka, torej ni nujna za izpeljavo teorije relativnosti, dovolj so zgornji splošnejši pogoji.

LITERATURA

[1] J. Strnad, *Fizika, 3. del*, DMFA, Ljubljana, 2002.

[2] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed., Wiley, New York, 1999.

[3] F. Križanič, *Navadne diferencialne enačbe in variacijski račun*, DZS, Ljubljana, 1974.

PRESEK IN OBZORNIK DOSTOPNA VSEM

ALEKSANDAR JURIŠIĆ[1]

[1]Fakulteta za računalništvo in informatiko Univerze v Ljubljani

Ključne besede: Math. Subj. Class. (2020): 01A99, 94-04

Predstavljena je digitalizacija revij Presek in Obzornik za matematiko in fiziko ter možnost iskanja v obeh.

PRESEK AND OBZORNIK ACCESSIBLE TO ALL

The digitization of the journals Presek and Obzornik for mathematics and physics, as well as the ability to search within both, is presented.

1. Uvod

Leta 2008[1] smo se čez poletje v Laboratoriju za kriptografijo in računalniško varnost, FRI/UL (LKRV), odločili, da digitaliziramo stare letnike revije **Presek** (letniki 01-31, 1973–2003, katerih pdf oz. tex datoteke niso bile ohranjenje) – glej `presek.si`, list za mlade matematike, fizike in astronome. Pdf datoteke smo dali na voljo DMFA, Vladimir Bensa, ki je takrat delal v Komisiji za tisk, pa je poskrbel, da so se kmalu za tem začeli pojavljati številni članki iz Preseka na digitalnem arhivu revije (`http://www.presek.si/arhiv.php`). Iz razgovora T. Pisanskega s prof. F. Križaničem (Presek, letnik 01/2).

> *Kaj menite o PRESEKU? Ali boste aktivno sodelovali v njem?* **Odg.** Veseli me zagnanost uredništva. Pisati matematiko za PRESEK je težko, teže kot za OBZORNIK. Pisati za OBZORNIK je spet teže kot pisati poljudne knjige, poljudne knjige je teže pisati kot srednješolske učbenike, le-te spet teže kot univerzitetne učbenike, te pa spet teže kot monografije.
>
> *Ali boste aktivno sodelovali v PRESEKU?* **Odg.** O PRESEKU in o monografijah ne govorim iz svojih izkušenj, ne enega ne drugega še nisem poskusil. Upam pa, da bom za PRESEK od časa do časa kaj zmogel, monografije napisal gotovo nobene ne bom.

[1]Spodbudilo nas je, da je Mednarodno društvo za uporabno kriptografijo (The International Association for Cryptologic Research – IACR, `https://iacr.org/`), v sodelovanjem z založbo Springer, naredilo digitalno knjižnico vseh starih člankov iz glavnih raziskovalnih konferenc Crypto, Eurocrypt, Asiacrypt in drugih (od leta 1981 dalje).

Vendar vsebina Preseka ne obsega samo člankov, njene naloge so verjetno prve, ki pritegnejo mlajše bralce. Digitalizirani Presek nas je motiviral, da smo leta 2012 začeli projekt **eQuiz**[2], kjer smo s študenti fakultet za računalništvo in informatiko (FRI) ter elektrotehniko (FE) začeli razvijati interaktivno (spletno) aplikacijo za matematične krožke. Z uporabo le-te smo želeli omogočili reševanje nalog iz Preseka[3] ter starih nalog s tekmovanj, kot sta npr. *Bober* (ACM) in *Strogo zaupno* (MATHEMA). Izkazalo se je, da je aplikacija primerna tudi za spodbujanje sprotnega študija na FRI.

Sledila je še digitalizacija starih izvodov revije **Obzornik za matematiko in fiziko**, ki je začel izhajati leta 1951. Ko smo letos opazili, da so se na domači strani Društva (`http://dmfa.si`) pojavili stari Obzorniki (od leta 2008, letnik 55 dalje), smo predlagali urednikoma Bojanu Kuzmi (matematika) in Alešu Mohoriču (fizika), da objavijo na istem mestu še naše pdf datoteke (letniki 01-54). Pobudo sta sprejela z veseljem.

Že od začetka digitalizacije je bilo jasno, da digitalna oblika člankov omogoča mnogo več od učinkovitega prenosa in branja na velikem zaslonu. Npr. spodobilo bi se, da je omogočeno zajemanje besedila z miško. Prav to smo s pridom uporabili pri vnašanju nalog iz Preseka v aplikacijo eQuiz. Začela pa so se porajati tudi vprašanja, kako bi si pri uporabi pomagali z umetno inteligenco (UI). Ko je Ivan Bratko, oče UI v Sloveniji, slišal za naš projekt, je nemudoma predlagal, da bi v aplikacijo uvedli *rating*. Po vsaki partiji šaha se popravi rating tekmovalcev – zmagovalcu se ga dvigne, poražencu pa zniža (seveda se pri tem upoštevata tudi predhodna ratinga), glej Elo [2][4].

S takim pristopom lahko aplikacija ocenjuje zahtevnost nalog in uspešnost/nivo reševalcev (idealno bi bilo sprotno ocenjevanje oz. napovedovanje končenih ocen).

Sedaj je omogočeno tudi iskanje po besedah ali celo frazah, in to skozi *vse* objavljene Obzornike oz. Preseke na naslovu `https://lkrv.fri.uni-lj.si`[5], glej sliko 1.

[2]Glej `https://lkrv.fri.uni-lj.si/equiz/`. Tema razpisa je bila: *"naredite kaj pametnega s pametnimi telefoni!"* V LKRV sta bila pri tem aktivna M. Mikac in P. Nose, pridružila pa sta se še A. Franc ter M. Vuk.

[3]Zeleno luč za to nam je dal Peter Legiša, predsednik DMFA – založništvo.

[4]Šahovska organizacija FIDE uporablja takšne sisteme že 80 let, elo-rating pa je v sedemdesetih letih prejšnjega stoletja razvil madžarsko-ameriški fizik Arpad Elo. Izhajal je iz modela Bradley-Terry (1952) in Luce (1959), ideja pa je še starejša, glej Thurstone (1927).

[5]V načrtu je, da digitalne vsebine preselimo na DMFA strežnik.

- Seminar za kriptografijo in teorijo kodiranja
- Certifikatna agencija @friCA
- e-Uganke / e-Quiz / m-Quiz
- Kriptogram
- Iskalnik po Obzorniku za matematiko in fiziko
- Iskalnik po reviji Presek

Slika 1. QR kodo preberite s telefonom.

Vendar se naš pristop ni ustavil pri tem. Začeli smo razmišljati o tem, kaj bi lahko dodali digitalnim vsebinam. Najprej smo s študenti FRI postavili **Kriptogram**, portal za kriptografijo (glej zgornjo povezavo), nato pa smo začeli pisati **eKripto knjigo**, ki vsebuje, za razliko od običajne knjige, predstavitev animacij ter interaktivne peskovnike. Slednji študentom pomagajo pri učenju oz. razumevanju snovi ali pa jim omogočajo lažje eksperimentiranje (beri igranje). Digitalne Preseke in Obzornike bodo uporabili tudi za gradnjo slovenskega velikega jezikovnega modela GaMS, ki nastaja v Laboratoriju za strojno učenje in jezikovne tehnologije. Vodi ga Marko Robnik-Šikonja, posebno aktiven pa je Domen Vreš.

2. Digitalizacija Preseka in Obzornika

Vsak postopek digitalizacij se začne z zbiranjem vseh starih izvodov in njihovo pripravo za čim bolj avtomatično branje z optičnimi čitalci. Prvi problem pri tem je, da so vsi izvodi v knjižnici običajno že vezani. Na srečo je imel avtor doma zbrane prav vse Preseke in je bilo dovolj, da smo odstranili kovinske sponke (avtor se opravičuje, če je kakšen nehote popisan, saj se je naročil na Presek še rosno mlad). Samo "skeniranje" je izvajala avtorjeva hči Eva, tehnično pa nam je zelo pomagal *Jernej Tonejc*, ki je napisal nekaj skript, s katerimi smo lažje prišli do pdf datotek in sestavili interno domačo stran. Obzornik je starejši po nastanku. V tem primeru sta pomagali Matematična knjižnica – MK (pri Maji Klavžar se je nabralo kar lepo število odpisanih izvodov) in DMFA–založništvo (Matjaž Zaveršnik), obrezali pa so jih v tiskarni, kjer Obzornike vežejo[6].

[6]Na tem mestu se zahvaljujemo še vsem ostalim, ki so nam pomagali do nekaterih manjkajočih izvodov.

Po grobi oceni smo spravili v digitalno obliko 11.000 strani (letniki 01-54 od skupno 71 letnikov) – celoten OMF pa trenutno predstavlja 15.000 strani, pri Preseku pa smo v digitalno obliko spravili 180 od 300 zvezkov Preseka, kar znese približno $180 \times 70 = 12.600$ (nekoliko manjših) strani (letniki 01-31 od skupno 52 letnikov). Tako je "oživelo" 85 letnikov od 123 (torej skoraj 70 %).

Pri delno avtomatizirani obdelavi optično prebranih dokumentov smo si pomagali z naslednjimi odprtokodnimi orodji, namenjenimi za uporabo v ukazni lupini (v večini primerov za operacijski sistem Linux):

- Interaktivno orodje za urejanje strani `pdfarranger` (majhen `python-gtk` vmesnik za `pikepdf`, ki omogoča razvrščanje, rezanje ...).
- Orodje za prepoznavo besedil iz slik `OCRmyPDF`, ki je zgrajeno na osnovi orodja `Tesseract OCR` (s slovenskim in latiniraziranim srbskim slovarjem za boljše rezultate).
- Orodji `pdftoppm` in `pdfimages`, ki sta del knjižnice `Poppler`, za izluščanje slik iz pdf.
- Orodje `Imagemagic`: zaznavanje/odpravljanje nagnjenosti, zaznavanje in odstranjevanje/dodajanje robov, kontrasta in zlaganje slik v pdf format.
- Orodje `qpfd`: premikanje, brisanje, obračanje ... strani v pdf dokumentih.
- Orodje `ripgrep-all`, ki je razširitev orodij `ripgrep` in `fzf`, za zelo hitro iskanje po geslih in vsebini tekstovnih datotek nekega sistema. `Ripgrep-all` omogoča iskanje po binarnih datotekah (v pdf obliki, filmih, stisnjenih datotekah, podatkovih bazah, pisarniških dokumentih, ...) in možnost izdelave indeksa za iskanje.

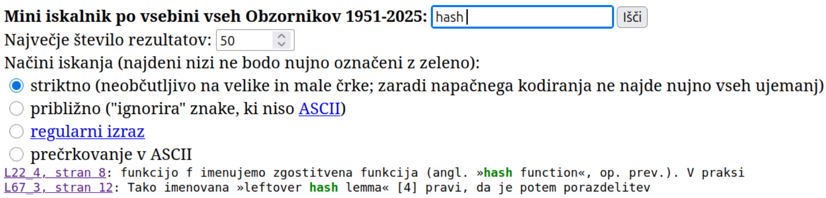
Novejši Obzorniki so bili rasterizirani in potem prebrani z ocr programom, ker je bilo kodiranje črk v originalnih pdf dokumentih neprimerno za iskanje (npr. črka `č` je bila sestavljena iz dveh zaporednih znakov `ˇc`). Obzorniki, kazala in iskalni indeks so bili naloženi na statično spletno stran z enostavnim iskalnikom po vsebini. Spletno stran je mogoče prenesti in uporabiti brez internetne povezave.

Vse pdf datoteke Presekov in Obzornikov smo znova obdelali tudi s programom za optično prepoznavanje znakov (angl. optical character recognition – OCR). V zadnjih destih letih so postali takšni programi mnogo močnejši (tudi z uporabo nevronskih mrež), vezani na jezik in slovarje. V LKRV se je v ocr-postopek najbolj poglobil Klemen Klanjšček, pa tudi za skeniranje in domačo stran je naredil številne izboljšave.

Slika 2. Presekove in Obzornikove naslovnice.

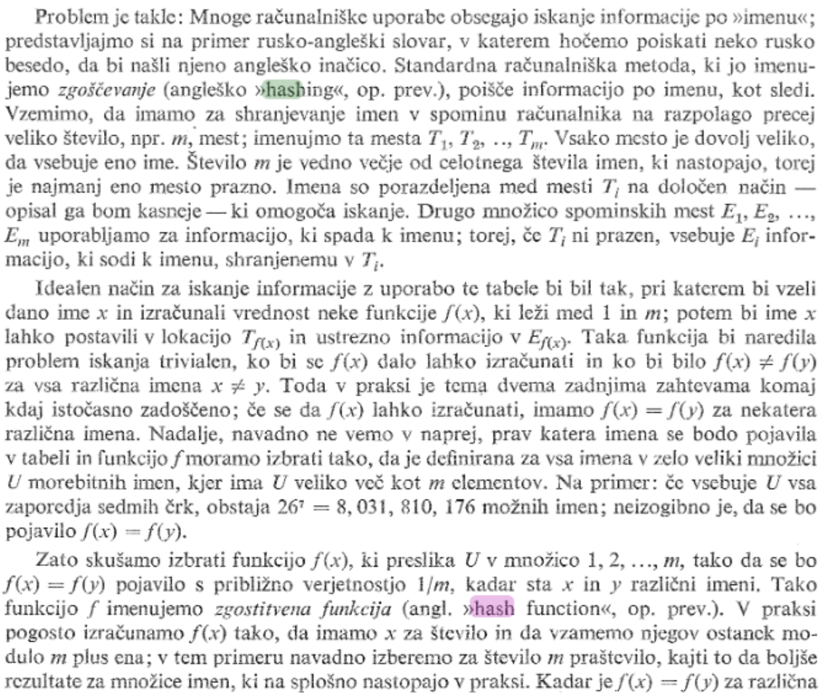
3. Iskalnik

Večina ne more imeti pregleda preko 123 letnikov (oz. skoraj 700 zvezkov), če je bila na primer neka tema že pokrita, iskalnik pa to seveda zmore brez problemov. Oglejmo si nekaj primerov. Recimo, da pišemo članek o zgoščevalnih funkcijah (eden je ravno v pripravi) in vpišemo za geslo “hash”, glej slika 3.



Slika 3. Zgoraj smo za besedo “hash” postavili še presledek. Beseda “zgoščevalna” ne obrodi sadov, “zgostitvena” pa nam da prvega od zgornjih člankov.

Ko “kliknemo” na podčrtano besedilo prve možnosti, pa vidimo naslednje, glej sliko 4.



Problem je takle: Mnoge računalniške uporabe obsegajo iskanje informacije po »imenu«; predstavljajmo si na primer rusko-angleški slovar, v katerem hočemo poiskati neko rusko besedo, da bi našli njeno angleško inačico. Standardna računalniška metoda, ki jo imenujemo *zgoščevanje* (angleško »hashing«, op. prev.), poišče informacijo po imenu, kot sledi. Vzemimo, da imamo za shranjevanje imen v spominu računalnika na razpolago precej veliko število, npr. m, mest; imenujmo ta mesta $T_1, T_2, .., T_m$. Vsako mesto je dovolj veliko, da vsebuje eno ime. Število m je vedno večje od celotnega števila imen, ki nastopajo, torej je najmanj eno mesto prazno. Imena so porazdeljena med mesti T_i na določen način — opisal ga bom kasneje — ki omogoča iskanje. Drugo množico spominskih mest $E_1, E_2, \ldots, E_m$ uporabljamo za informacijo, ki spada k imenu; torej, če T_i ni prazen, vsebuje E_i informacijo, ki sodi k imenu, shranjenemu v T_i.

Idealen način za iskanje informacije z uporabo te tabele bi bil tak, pri katerem bi vzeli dano ime x in izračunali vrednost neke funkcije $f(x)$, ki leži med 1 in m; potem bi ime x lahko postavili v lokacijo $T_{f(x)}$ in ustrezno informacijo v $E_{f(x)}$. Taka funkcija bi naredila problem iskanja trivialen, ko bi se $f(x)$ dalo lahko izračunati in ko bi bilo $f(x) \neq f(y)$ za vsa različna imena $x \neq y$. Toda v praksi je tema dvema zadnjima zahtevama komaj kdaj istočasno zadoščeno; če se da $f(x)$ lahko izračunati, imamo $f(x) = f(y)$ za nekatera različna imena. Nadalje, navadno ne vemo v naprej, prav katera imena se bodo pojavila v tabeli in funkcijo f moramo izbrati tako, da je definirana za vsa imena v zelo veliki množici U morebitnih imen, kjer ima U veliko več kot m elementov. Na primer: če vsebuje U vsa zaporedja sedmih črk, obstaja $26^7 = 8,031,810,176$ možnih imen; neizogibno je, da se bo pojavilo $f(x) = f(y)$.

Zato skušamo izbrati funkcijo $f(x)$, ki preslika U v množico $1, 2, \ldots, m$, tako da se bo $f(x) = f(y)$ pojavilo s približno verjetnostjo $1/m$, kadar sta x in y različni imeni. Tako funkcijo f imenujemo *zgostitvena funkcija* (angl. »hash function«, op. prev.). V praksi pogosto izračunamo $f(x)$ tako, da imamo x za število in da vzamemo njegov ostanek modulo m plus ena; v tem primeru navadno izberemo za število m praštevilo, kajti to da boljše rezultate za množice imen, ki na splošno nastopajo v praksi. Kadar je $f(x) = f(y)$ za različna

Slika 4. Polno ujemanje iskanega gesla je v tekstu še pobarvano z eno barvo, delno pa z drugo.

Iščimo še kombinacijo besed/frazo, glej sliko 5.

Mini iskalnik po vsebini vseh Obzornikov 1951-2025: Kitajski izrek o ostankih Išči
Največje število rezultatov: 50
Načini iskanja (najdeni nizi ne bodo nujno označeni z zeleno):
- (•) striktno (neobčutljivo na velike in male črke; zaradi napačnega kodiranja ne najde nujno vseh ujemanj)
- ( ) približno ("ignorira" znake, ki niso ASCII)
- ( ) regularni izraz
- ( ) prečrkovanje v ASCII

```
L46_6, stran 26: Kitajski izrek o ostankih
L54_2, stran 36: Ko uporabimo kitajski izrek o ostankih v našem primeru, dobimo štiri rešitve
L54_2, stran 36: Trditev (kitajski izrek o ostankih). Naj bosta n, in na tuji si naravni števili
```

Slika 5. Narekovajev, ki bi označili frazo, iskalnik zaenkrat še ne razume. Prva povezava nas pripelje do reference diplome Albine Grabner Kitajski izrek o ostankih, ki jo lahko poiščemo v MK.

Pri drugi povezavi lahko preberemo Kitajski izrek za dva modula, glej sliko 6.

Trditev (kitajski izrek o ostankih). *Naj bosta n_1 in n_2 tuji si naravni števili in a_1 ter a_2 celi števili. Potem obstaja natanko eno število x med 0 in $n_1n_2 - 1$, za katero velja $x \equiv a_1 \pmod{n_1}$ in $x \equiv a_2 \pmod{n_2}$ (torej, da je ostanek x pri deljenju z n_i enak ostanku a_i pri deljenju z n_i).*

Dokaz. Predpostavimo lahko, da velja $0 \leq a_1 < n_1$ in $0 \leq a_2 < n_2$, saj nas zanimajo le ostanki pri deljenju z ustreznim n_i. Potem mora veljati, da je $x = kn_1 + a_1$ za neki k. Če si za $k = 0, 1, \ldots, n_2 - 1$ ogledamo ostanke števil $kn_1 + a_1$ pri deljenju z n_2, ugotovimo, da so vsi ti ostanki različni. Če bi namreč dva bila enaka, bi veljalo, da je $k_1n_1 + a_1 - (k_2n_1 + a_1) = (k_1 - k_2)n_1$ deljivo z n_2, kar ni možno (n_1 je tuje n_2, razlika $k_1 - k_2$ pa je manjša od n_2). Ker so vsi ostanki torej različni, obstaja natanko en k^*, pri katerem je ostanek enak a_2. Tako je $x = k^*n_1 + a_1$ iskano število. ∎

Ko uporabimo kitajski izrek o ostankih v našem primeru, dobimo štiri rešitve med števili $0, 1, \ldots, 10^{2006} - 1$. Te rešitve so medsebojno različne, saj imajo različne ostanke po modulih 2^{2006} in 5^{2006}. Ena izmed štirih rešitev je enaka 0 in ne ustreza pogoju naloge. Odgovor je torej tri.

Slika 6. Da ne bi bilo preveč barvanja, je črka “o” izključena.

Rezultati iskanja zgoščevalne funkcije v Preseku so predstavljeni na sliki 7.

Mini iskalnik po vsebini vseh Presekov 1972-2025: zgoščevalna Išči
Največje število rezultatov: 50
Načini iskanja (najdeni nizi ne bodo nujno označeni z zeleno):
- (•) striktno (neobčutljivo na velike in male črke; zaradi napačnega kodiranja ne najde nujno vseh ujemanj)
- ( ) približno ("ignorira" znake, ki niso ASCII)
- ( ) regularni izraz
- ( ) prečrkovanje v ASCII

```
L38_1, stran 28: (2.) Kakšne lastnosti naj ima zgoščevalna funkcija,
L51_1, stran 28: kriptografsko varna zgoščevalna funkcija?
```

Mini iskalnik po vsebini vseh Presekov 1972-2025: zgoščeval Išči
Največje število rezultatov: 50
Načini iskanja (najdeni nizi ne bodo nujno označeni z zeleno):
- striktno (neobčutljivo na velike in male črke; zaradi napačnega kodiranja ne najde nujno vseh ujemanj)
- približno ("ignorira" znake, ki niso ASCII)
- regularni izraz
- prečrkovanje v ASCII

L33_6, stran 2: temelj različnih **zgoščeval**nih algoritmov, ki omogočajo moderne tehnologije kot so dvd, hdtv in velike
L38_1, stran 26: **zgoščeval**ne
L38_1, stran 26: ki jim rečemo **zgoščeval**ne funkcije, pač pa omenimo
L38_1, stran 27: ki jim rečemo **zgoščeval**ne funkcije, pač pa omenimo
L38_1, stran 28: (2.) Kakšne lastnosti naj ima **zgoščeval**na funkcija,
L50_5, stran 26: Doslej se nam je uspelo izogniti **zgoščeval**nim funkcijam, kar pomeni, da se bomo morali pomeniti o
L51_1, stran 24: Problem istočasnosti lahko rešimo z uporabo kriptografsko varne **zgoščeval**ne funkcije.
L51_1, stran 26: Lahko pa se vprašamo tudi, ali obstajajo kriptografsko varne **zgoščeval**ne funkcije primerne za
L51_1, stran 26: Odprt problem: ali kriptografske **zgoščeval**ne
L51_1, stran 26: Ta čas sicer imamo kar nekaj kriptografskih **zgoščeval**nih funkcij, za katere se smatra (ali vsaj upa),
L51_1, stran 26: kriptografskih **zgoščeval**nih funkcij segajo 45 let nazaj (glej Merkle 1979 in npr. Damgärd). V devetdesetih letih prejšnjega stoletja je zelo hitro naraslo
L51_1, stran 26: teh treh informacij je hmagnet in osnovni del magnetne povezave, glej sliko 3. Ker se zgoščevanje izvaja s kriptografsko varno **zgoščeval**no funkcijo H,
L51_1, stran 26: če boste rešili vsaj nekaj spodnjih nalog, boste opazili, da se zdi na prvi pogled konstrukcija kriptografskih **zgoščeval**nih funkcij (pre)zahtevna naloga. V
L51_1, stran 26: število modelov **zgoščeval**nih funkcij, vendar so bile
L51_1, stran 27: 7. Katere lastnosti želimo pri **zgoščeval**nih funkcijah za hranjenje gesel v računalniških sistemih?
L51_1, stran 27: **zgoščeval**nih funkcij tako, da rešiš Anin in Bojanov problem?
L51_1, stran 28: 14. Za kriptografske **zgoščeval**ne funkcije skoraj
L51_1, stran 28: R) za sestavo nove **zgoščeval**ne funkcije in jo
L51_1, stran 28: enake začetnice, je sicer majhna, 2,7 %, a v svetu **zgoščeval**nih funkcij je to ogromno. Za primer lahko naredimo tudi scenarij, da je v razredu 20 učencev. Takrat je možnost, da imata
L51_1, stran 28: kriptografsko varna **zgoščeval**na funkcija?

Slika 7. Kot vidite zgoraj, moramo paziti tudi na slovensko sklanjanje. Včasih so podvajanja že kar moteča, a iskalnik označi vsako stran tolikokrat, kot se je tam geslo ponovilo.

Oglejmo si še rezultate za frazo “Kitajski izrek o ostankih” v Preseku, glej sliko 8.

Mini iskalnik po vsebini vseh Presekov 1972-2025: Kitajski izrek o ostankih Išči
Največje število rezultatov: 50
Načini iskanja (najdeni nizi ne bodo nujno označeni z zeleno):
- striktno (neobčutljivo na velike in male črke; zaradi napačnega kodiranja ne najde nujno vseh ujemanj)
- približno ("ignorira" znake, ki niso ASCII)
- regularni izraz
- prečrkovanje v ASCII

L37_6, stran 10: linearnih kongruenc in sistemov linearnih kongruenc. Tu srečamo znameniti **kitajski izrek o ostankih**.
L42_4, stran 11: **Kitajski izrek o ostankih**. Kitajci so vedeli, da morajo
L48_3, stran 7: **Kitajski izrek o ostankih**. Kitajci so vedeli, da morajo

Slika 8. Zadnji dve referenci nakazujeta, da gre za ponovljen članek (in res je tako).

Zgornja možnost *regularni izraz* je precej močno orodje. Primer.

`Tajnopis.*Bojan` oziroma `((Tajnopis.*Bojan)|(Bojan.*Tajnopis))`
Prva možnost opravi splošno iskanje besed `Tajnopis` in `Bojan` znotraj ene vrstice, druga pa v smislu logičnega `AND` (ko vrstni red ni pomemben). Pika je katerikoli znak, `*` pa pomeni, da se lahko le-ta ponovi od 0-krat do števila znakov v eni vrstici.

4. Kam naprej

Pri optičnemu branju so se gotovo zgodile napake in treba jih bo odpraviti. Tu računamo na pomoč celotne skupnosti, da bodo javljali napake, mi pa jih bomo skušali po najboljših močeh odpravljati. Med prebiranjem boste izvedeli veliko o slovenskih matematikih, fizikih, astronomih in Društvu, ki so ga vodili.

Idealno bi bilo najti način, kako narediti kazalo po avtorjih in stvarno kazalo avtomatično. Morda bi lahko predstavili stvarno kazalo (intuitivno) kot drevo, na katerem predstavljajo liste posamezni članki. Tam, kjer ni listov (oz. jih je malo), bi bilo dobro napisati nov članek.

Že pri opremljanju nalog z značkami v aplikaciji eQuiz smo naleteli na problem klasifikacije (za potrebe predmeta Verjetnost in statistika smo si izmislili svojo delitev T01-15 ter nato še podrobnejšo delitev). V Obzorniku smo v prvem kazalu (letniki 01-15) najprej uporabljali naslednjo delitev:

- MATEMATIKA. – Splošno
  - Aritmetika. Teorija števil
  - Algebra
  - Geometrija. Topologija
  - Analiza
  - Variacijski račun. Funkcionalna analiza
  - Matematične igre. Kombinatorika. Verjetnost. Statistika. Teorija iger. Teorija množične strežbe
  - Numerična analiza
  - Računski stroji
- ASTRONOMIJA. GEOFIZIKA
- FIZIKA. – Splošno
  - Osnove fizike. Relativnost. Kvantna teorija. Gravitacija
  - Mehanika
  - Mehanika tekočin. Vakuum. Plazma
  - Nihanje. Akustika
  - Toplota
  - Elektromagnetizem
  - Jedro. Elementarni delci. Radioaktivnost
  - Atomi. Molekule
  - Trda snov. Kristali
  - Reaktorji. Izotopi
  - Elektronika. Pospeševalniki

ki so ji sledile druge (številne) rubrike. Izkazalo pa se je, da je klasifikacije že opravil kar sam Ciril Velkavrh (s pomočjo nekaterih kolegov - morda bi UI to še nekako zmogla). Za naslednjih 15 letnikov (16-30) je bila uporabljena **Mathematical Subject Classification (1980) – MSC** (od L17, tj. l. 1970 dalje UDK, nato od L25 dalje MSC 1970) ter fiziko in drugo po **Univerzalni decimalni klasifikaciji – UDK**, oznako klasifikacije so verjetno od tu dalje morali izbrati avtorji sami. Seveda so matematiki posodabljali MSC (1985, 2000,...). Tu UI najverjetneje zataji (kako točno izgleda posodobitev hierarhično, je verjetno zapletena reč), sicer pa imajo novejši članki že oznake (vendar bi bilo z novejšimi kazali precej lažje).

Strokovna besedila s področja Preseka in Obzornika so zelo koristna pri učenju velikih jezikovnih modelov, spodbujajo namreč logično razmišljanje, ki modelom koristi pri večini nalog. Posledično tudi izboljšujejo rezultate pri testih, ki se uporabljajo za ocenjevanje teh modelov. Ta besedila, skupaj s programsko kodo, zadnje čase predstavljajo velik delež besedil v učnih množicah velikih tehnoloških podjetij. Da bi lahko na takšnih besedilih učili tudi slovenski model GaMS, poteka (v okviru projekta PoVeJMo) pretvorba pdf dokumentov Presekov in Obzornikov v Markdown format, ki je berljiv za velike jezikovne modele. Za to se uporabljajo moderne knjižnice, kot je na primer `marker`, ki uporabljajo sodobne multimodalne modele, kot sta recimo nedavno objavljeni Gemma 3 in Llama 4. Tako pretvorjena besedila lahko koristijo tudi kot baza znanja za velike jezikovne modele. Z uporabo generacije, obogatene z iskanjem (angl. Retrieval Augmented Generation - RAG) [4], lahko model v taki bazi najde ustrezen pristop za reševanje podanega problema. Na ta način lahko učenca ali dijaka, ki se mu pri pripravi na tekmovanje zatakne pri reševanju določene naloge, usmeri v pravo smer. Z nadaljnjim razvojem UI bomo morda nekega dne uspeli avtomatično prevesti naši reviji (brez da bi izgubili bistvo oz. strokovno korektnost) in bo vsebina na voljo vsem, ki jih zanima to področje.

5. Zaključek

Leta 1988 je avtor odšel na podiplomski študij v Kanado (na Fakulteto za matematiko, Oddelek za kombinatoriko in optimizacijo, Univerze v Waterlooju), ter od tam spremljal strokovne kolege v Sloveniji in delo društva predvsem prek revij Presek in Obzornik. Kot študentu raziskovalcu mu je mentor Chris Godsil naročil, da naj spremlja vsaj 10 raziskovalnih revij s svojega področja. To se mu je sprva zdelo strašansko veliko. Kmalu je ugotovil, da sta mu Presek in Obzornik na neki način olajšala ta preskok. Pa ne samo to. Čez čas je spoznal tudi, da spremljanje določene revije na dolgi rok dejansko pomeni širjenje obzorja. Iz Kanade se je vrnil leta 1997. V tem času je ugotovil, da se že članki v Preseku in Obzorniku dotaknejo takorekoč skoraj vsakega področja matematike/fizike, zato je z branjem nadaljeval, hkrati pa začel objavljati v obeh revijah tudi svoje članke.

Kot vemo, se trudimo, da bi bili Presekovi članki pisani za osnovnošolce oz. srednješolce. Obzornikovi članki pa naj bi bili čim lažje razumljivi srednješolskim učiteljem matematike in fizike, ki predstavljajo jedro članov našega Društva. Ko pa se obrnemo nazaj, spoznamo, da pomagajo tudi vrhunskim raziskovalcem. Na prav prijeten način namreč skrbijo za ohranjanje določene strokovne širine, saj nas objavljanje raziskovalnih člankov pogosto sili v vse večjo specializacijo. V tem smislu sta ti reviji za nas v Sloveniji prava *bisera*, tako da moramo še naprej ceniti njuno pravo vrednost in se truditi nadaljevati to lepo tradicijo.

O aplikaciji eQuiz, ratingu (ki predstavlja aktivno raziskovalno področje tudi na FRI, glej npr. [3]) in revoluciji učenja [1] pa bomo pisali ob drugi priložnosti.

Zahvala Petru Legiši, ki je prvi uradno podprl našo digitalizacijo, in tudi Klemnu Klanjščku ter Domnu Vreši za vse informacije o njunem delu, ki sta mi jih posredovala.

LITERATURA

[1] G. Dryden, I. Belič (prevajalec), J. Vos, Revolucija učenja (angl. The learning revolution), Podnaslov: Spremenimo način učenja, Ljubljana: Educy, 2001.

[2] A. E. Elo. The Rating of Chessplayers, Past and Present. Arco Pub., New York, 1978. ISBN 0668047216 9780668047210. URL `http://www.amazon.com/Rating-Chess-Players-Past-Present/dp/0668047216`.

[3] B. Krese in E. Štrumbelj, A Bayesian approach to time-varying latent strengths in pairwise comparisons, PLoS ONE **16** (5) (2021): e0251945. `https://doi.org/10.1371/journal.pone.0251945`

[4] P. Lewis, E. Perez, A. Piktus, F. Petroni, V. Karpukhin, N. Goyal, H. Küttler, M. Lewis, W. Yih, T. Rocktäschel, S. Riedel in D. Kiela, Retrieval-augmented generation for knowledge-intensive NLP tasks. Proceedings of the 34th International Conference on Neural Information Processing Systems (2020), str. 9459—9474. `https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/3495724.3496517`

Dr. Marko Razpet in prof. dr. Dragan Mihailović nova častna člana DMFA Slovenije

Občni zbor DMFA Slovenije je 6. marca 2025 v Ljubljani za nova častna člana izvolil dr. Marka Razpeta, zaradi njegovih številnih prispevkov k delovanju društva in izjemnega prispevka k popularizaciji matematike in razvoju matematičnega izobraževanja v Sloveniji, in dr. Dragana Mihailovića, zaradi njegovih izrednih prispevkov k razvoju slovenske fizike in njeni prepoznavnosti v mednarodni skupnosti ter za vestno delo predsednika DMFA Slovenije v letih 2016-2020.

Dr. Marko Razpet se je rodil 22. marca 1949 v Planini pri Cerknem. Leta 1968 je maturiral na Gimnaziji Jurija Vege v Idriji in leta 1973 diplomiral iz tehnične matematike na takratni FNT Univerze v Ljubljani. Vrsto let je bil zaposlen kot asistent na Fakulteti za strojništvo Univerze v Ljubljani. Po uspešnem zagovoru doktorata iz uporabe umbralnega računa v kombinatoriki se je leta 1989 kot visokošolski učitelj zaposlil na Pedagoški fakulteti Univerze v Ljubljani, kjer je bodočim dvopredmetnim učiteljem matematike predaval Analizo in druge predmete vse do upokojitve leta 2014. V tem času je na fakulteti opravljal številne funkcije, od predstojnika Oddelka za matematiko in računalništva (1996-98), do članstev v Senatu fakultete in različnih komisijah, tudi za pripravo novih študijskih programov in podobno.

Svoja znanstvena dela s področja umbralnega računa, mrežnih poti, algebre in analize je Marko Razpet objavljal v tujih matematičnih revijah, npr. J. Mathematical Analysis and Appl., Ars Combinatoria, Linear Algebra and its Appl., Discrete Mathematics. Precej obširnih prispevkov je objavil tudi v društveni reviji Obzornik za matematiko in fiziko in v Elektrotehniškem vestniku, kjer obravnava predvsem uporabo matematičnih metod pri nekaterih problemih teoretične elektrotehnike.

V svojem pedagoškem delu je Marko Razpet svoje bogato strokovno matematično znanje pogosto duhovito popestril z umetniškimi, zgodovinskimi, računalniškimi in tehničnimi vložki. Študente je k delu in matematiki spodbujal z aktivnimi in alternativnimi didaktičnimi metodami (tudi z gledališkimi nastopi). Zaradi njegove široke razgledanosti in toplega značaja pa so ga radi prosili za mentorstvo. Tako je bil zanesljiv mentor okoli 240 diplomantom dvopredmetnih smeri Pedagoške fakultete, več magistrantom in somentor eni doktorandki. Številni od njegovih študentov so danes prepoznavni strokovnjaki na področju matematike in matematičnega izobraževanja.

Marko Razpet je bil med slovenskimi pionirji uporabe računalnika in tehnoloških pripomočkov pri pouku matematike – številni uporabniki LaTeXa v devetdesetih letih so svoje prve korake naredili s pomočjo njegovih knjižic in nasvetov. Navdušeno in uspešno je v pouk matematike uvajal tudi uporabo orodij Derive za algebro ter Cabri geometry in kasneje GeoGebre za geometrijo, bodisi v okviru rednih študijskih predmetov in diplomskih del, bodisi v okviru priložnostnih krožkov in seminarjev za študente ali učitelje. Po svojih predavanjih za podiplomske študente na FMF UL je napisal tudi knjigi Ravninske krivulje in Umbralni račun, ki sta izšli pod okriljem založbe DMFA.

Velik del svojega strokovnega delovanja je Marko Razpet posvetil zgodovini matematike, s poudarkom na raziskovanju in ohranjanju zapuščine slovenskih matematikov. Tako je s poglobljenimi strokovnimi prispevki in predavanji sodeloval pri obeležitvi jubilejev Franca Močnika, Jurija Vege, Josipa Plemlja, Ivana Vidava, Franca Hočevarja, Iva Laha itd. Zgodovinsko delo naštetih slovenskih matematikov je vrsto let redno predstavljal na avstrijskih simpozijih za zgodovino matematike, občasno pa tudi na večjih mednarodnih kongresih, npr. v Budimpešti, Salzburgu in Portorožu. Na pobudo Tomaža Pisanskega je februarja 2010 pomagal ustanoviti in je prvih 5 let tudi vodil Seminar za zgodovino matematičnih znanosti, ki odtlej pod okriljem FMF, IMFM in DMFA neprekinjeno deluje v obliki rednih tedenskih srečanj raziskovalcev in ljubiteljev tega področja.

Marko Razpet je vrsto let aktivno deloval tudi v DMFA Slovenije. Od leta 1990 do 1997 je bil kot predsednik Sekcije za uporabno matematiko član Upravnega odbora društva, v tej funkciji je bil leta 1994 tudi med organizatorji doslej edinega Slovenskega kongresa matematikov in fizikov v Cankarjevem domu. Tudi kasneje je bil zanesljiv in reden sodelavec pri številnih društvenih aktivnostih. Vrsto let je za izobraževalni seminar ob občnem zboru DMFA vsako leto pripravil dve predavanji o aktualnih temah za OŠ in SŠ učitelje matematike, od leta 1995 do 2001 je seminarje v okviru Stalnega strokovnega izpopolnjevanja sam tudi vodil. Mladim udeležencem poletnih šol DMFA na Bledu in v Bohinju je redno predaval vsako leto od leta 1997 do 2009, kot predavatelj pa je sodeloval še pri številnih drugih priložnostnih seminarjih in strokovnih srečanjih pod okriljem DMFA Slovenije, Pedagoške fakultete UL, Zavoda RS za šolstvo ali drugih organizatorjev.

Kot eden izmed najbolj plodnih slovenskih avtorjev s področja elementarne matematike je napisal in objavil tudi zelo veliko prispevkov za revijo Presek, pri kateri od leta 2003 dalje deluje tudi kot član uredniškega odbora in recenzent. V reviji Obzornik za matematikov in fiziko, pri kateri je od leta 2009 dalje tudi član uredniškega odbora, redno objavlja tudi zgodovinske prispevke in recenzije knjig, opravil pa je tudi izjemno količino strokovnega dela na področju recenzij učbenikov, strokovnih in znanstvenih prispevkov tako za domače kot tuje založnike. Radovednim bralcem in ljubiteljem matematike je v spletnih arhivih Pedagoške fakultete UL na voljo tudi izjemno število Markovih elektronskih rokopisov o različnih matematičnih temah, o katerih razmišlja na njemu lasten, izviren in ustvarjalen način s prepletanjem različnih področij, orodij, jezikov ali zgodovinskih obdobij.

Kot pravi pregovor, da po sadežu spoznaš drevo, lahko Marka Razpeta zanesljivo prepoznamo po njegovem bogatem znanstvenem in strokovnem delu, predvsem pa po njegovih diplomantih - številnih uspešnih učiteljih in učiteljicah matematike na osnovnih in srednjih šolah po vsej Sloveniji. Za svoje delo je v preteklosti že prejel Bevkovo nagrado občine Cerkno (2002), priznanje DMFA Slovenije (2004) in nagrado RS za življenjsko delo na področju šolstva (2011).

Profesor dr. Dragan Mihailović je vrhunski znanstvenik in eden izmed vodilnih raziskovalcev na področju eksperimentalne fizike kondenzirane snovi. V zadnjem obdobju se osredotoča na raziskave neravnovesnih sistemov in kvantnih faznih prehodov z metodo kratkočasovne spektroskopije.

Rojen je bil leta 1958 in se šolal v Sloveniji, Združenem kraljestvu in ZDA. Diplomiral je iz fizike leta 1979 na Univerzi v Oxfordu, kjer je pri petindvajsetih letih tudi doktoriral s področja laserske spektroskopije elektronskih prehodov v trdni snovi. Podoktorsko usposabljanje je kot Fulbrightov štipendist opravil na Univerzi v Kaliforniji v Santa Barbari pri nobelovcu Alanu J. Heegerju, leta 1995 pa je kot gostujoči profesor deloval v Laboratoriju Clarendon na Univerzi v Oxfordu.

Leta 2002 je na Institutu Jožef Stefan ustanovil Odsek za kompleksne snovi, in postal redni profesor na Fakulteti za matematiko in fiziko Univerze v Ljubljani, predava pa tudi na Mednarodni podiplomski šoli Jožefa Stefana (MPS). Bil je mentor 23 doktorantov ter številnih diplomantov in magistrantov. Je direktor Centra odličnosti za nanoznanosti in nanotehnologije, ki ga je ustanovil leta 2004. Od leta 2021 je izredni član Slovenske akademije znanosti in umetnosti (SAZU), med letoma 2016 in 2020 pa je dva zaporedna mandata predsedoval DMFA Slovenije.

Njegovo raziskovalno delo poganjata radovednost in pionirski pristop k raziskavam z visokim tveganjem. Osrednje področje njegovih raziskav je fizika faznih prehodov, predvsem v superprevodnikih in drugih elektronsko urejenih sistemih, pri čemer uporablja sunkovno lasersko spektroskopijo. Raziskovalno se je ukvarjal tudi z elektronskim in fononskim Ramanovim sipanjem, infrardečo in fotoinducirano absorpcijo, transportom v nizkodimenzionalnih materialih in molekularnim magnetizmom. S sodelavci je kot prvi s časovno ločljivo spektroskopijo raziskal sisteme z valovi gostote naboja v eno- in dvodimenzionalnih sistemih ter opazoval dinamiko kolektivnih načinov pri faznih prehodih z zlomljeno simetrijo. Predlagal in (so)odkril je polaronsko kvantno spinsko tekočino v spojini TaS2, leta 2014 pa je s sodelavci odkril skrito topološko kvantno stanje v elektronskem kristalu, ustvarjeno pod neravnovesnimi pogoji. V isti snovi je kmalu po tem razvil rekordno hiter kvantni spominski element, s čimer je odprl aktualno novo področje raziskav.

Je avtor oz. soavtor 340 izvirnih znanstvenih člankov, med katerimi je treba omeniti pet člankov v najprestižnejših revijah Nature in Science. Njegova dela so v mednarodni literaturi citirana več kot 11.000-krat (Web of Science). Poleg tega je nosilec več patentov na področju kvantnih materialov in naprav. Za svoje delo je leta 1986 prejel nagrado Sklada Borisa Kidriča, leta 2002 pa Zoisovo nagrado za vrhunske znanstvene dosežke na področju fizike kondenzirane materije.

Širša javnost ga pozna kot prvega slovenskega prejemnika projekta Evropskega raziskovalnega sveta (ERC) za uveljavljene raziskovalce, ki ga je leta 2012 prejel za raziskave Koherentnih trajektorij skozi fazne prehode z zlomom simetrije. Na podlagi teh raziskav je leta 2017 prejel tudi ERC projekt za razvoj inovativnih potencialov svojih raziskav. Svoj drugi ERC projekt za uveljavljene raziskovalce je prejel leta 2024 za raziskave novih skritih metastabilnih ureditev v kvantnih materialih.

S svojim izvirnim, vrhunskim in mednarodno izredno odmevnim raziskovalnim delom profesor Mihailović pomembno prispeva k razvoju fizikalnih znanosti v Sloveniji. Njegova sposobnost jasne in zanimive komunikacije pa zapleteno kvantno znanost približa tudi širši javnosti.

Slika 1. Marko Razpet in predsednica društva Mojca Vilfan, foto: Luka Kostanjevec.

Slika 2. Dragan Mihajlović in predsednica društva Mojca Vilfan, foto: Luka Kostanjevec.

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO
LJUBLJANA, MAREC 2025
Letnik 71, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki **Strani**

Novice

CONTENTS

Articles **Pages**

Na naslovnici: Republika Slovenija je ob 150. obletnici rojstva Josipa Plemlja izdala spominski kovanec, na katerem so upodobljeni deli enačbe, ki jo je Josip Plemelj rešil prvi na svetu. Števila in simboli se vrtijo v krožnicah, ki ponazarjajo gibanje planetov. Na kovancu sta ponazorjeni obe področji dela in raziskovanja Josipa Plemlja, matematika in astronomija.