

2026
Letnik 72
4

OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Glasilo Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije
Ljubljana, JANUAR 2026, letnik 72, številka 4, strani 121–160

Naslov uredništva: DMFA Slovenije, Jadranska ulica 19, 1000 Ljubljana **Telefon:** (01) 4766 500 **Elektronska pošta:** zalozba@dmfa.si **Internet:** <http://www.obzornik.si/> **Transakcijski račun:** SI56 0205 3001 1983 664
Mednarodna nakazila: Nova Ljubljanska banka d.d., Ljubljana, Trg republike 2, Ljubljana **SWIFT (BIC):** LJBASIX **IBAN:** SI56 0205 3001 1983 664

Uredniški odbor: Peter Legiša, Sašo Strle, Bojan Kuzma (urednik za matematiko), Aleš Mohorič (tehnični urednik, urednik za fiziko in odgovorni urednik), Mirko Dobovišek, Irena Drevenšek Olenik, Damjan Kobal, Petar Pavešić, Marko Razpet, Nada Razpet, Peter Šemrl.

Jezikovno pregledal Grega Rihtar.

Natisnila tiskarna DEMAT v nakladi 150 izvodov.

Člani društva prejemajo Obzornik brezplačno. Celoletna članarina znaša 25 EUR. Naročnina za ustanove je 60 EUR, za tujino 35 EUR.

DMFA je včlanjeno v Evropsko matematično društvo (EMS), v Mednarodno matematično unijo (IMU), v Evropsko fizikalno društvo (EPS) in v Mednarodno združenje za čisto in uporabno fiziko (IUPAP). DMFA ima pogodbo o recipročnosti z Ameriškim matematičnim društvom (AMS).

Revija izhaja praviloma vsak tretji mesec. Sofinancira jo Javna agencija za znanstvenoraziskovalno in inovacijsko dejavnost Republike Slovenije iz sredstev državnega proračuna iz naslova razpisa za sofinanciranje domačih znanstvenih periodičnih publikacij.

© 2026 DMFA Slovenije

Članki so objavljeni z licenco CC BY-SA

NAVODILA SODELAVCEM OBZORNIKA ZA ODDAJO PRISPEVKOV

Revija Obzornik za matematiko in fiziko objavlja izvirne znanstvene in strokovne članke iz matematike, fizike in astronomije, včasih tudi kak prevod. Poleg člankov objavlja prikaze novih knjig s teh področij, poročila o dejavnosti Društva matematikov, fizikov in astronomov Slovenije ter vesti o drugih pomembnih dogodkih v okviru omenjenih znanstvenih ved. Prispevki naj bodo zanimivi in razumljivi širšemu krogu bralcev, diplomantov iz omenjenih strok.

Članek naj vsebuje naslov, ime avtorja (oz. avtorjev), sedež institucije, kjer avtor(ji) dela(jo), izvleček v slovenskem jeziku, naslov in izvleček v angleškem jeziku, ključne besede in citirano literaturo. Slike in tabele, ki naj bodo oštevilčene, morajo imeti dovolj izčrpen opis, da jih lahko večinoma razumemo tudi ločeno od besedila. Avtorji člankov, ki želijo objaviti slike iz drugih virov, si morajo za to sami priskrbeti dovoljenje (copyright). Prispevki so lahko oddani v računalniški datoteki PDF ali pa natisnjeni enostransko na belem papirju formata A4. Zaželeno velikost črk je 12 pt, razmik med vrsticami pa vsaj 18 pt.

Prispevke pošljite odgovornemu uredniku ali uredniku za matematiko oziroma fiziko na zgoraj napisani naslov uredništva. Vsak članek se praviloma pošlje dvema anonimnima recenzentoma, ki morata predvsem natančno oceniti, kako je obravnavana tema predstavljena, manj pomembna pa je originalnost (in pri matematičnih člankih splošnost) rezultatov. Če je prispevek sprejet v objavo, potem urednik prosi avtorja še za izvirne računalniške datoteke. Le-te naj bodo praviloma napisane v eni od standardnih različic urejevalnikov $\text{\TeX}$ oziroma $\text{\LaTeX}$, kar bo olajšalo uredniški postopek.

Avtor se z oddajo članka strinja tudi z njegovo kasnejšo objavo v elektronski obliki na internetu.

KRATKA ZGODOVINA PERSPEKTIVE IN NJENE POVEZAVE Z GEOMETRIJO

JURIJ KOVIČ¹

¹IMFM, Ljubljana in Univerza na Primorskem, FAMNIT, Koper

Math. Subj. Class. (2010): 01A40, 01A55, 51A05

V članku predstavimo primer obojestransko koristnega medsebojnega vpliva znanosti in umetnosti: kot je klasična Evklidova geometrija pomagala pri razvoju linearne perspektive v slikarstvu renesanse, je linearna perspektiva utrla pot opisni in projektivni geometriji. Perspektivo osvetlimo s teoretičnega, zgodovinskega, aplikativnega, učnega in pedagoškega vidika.

A BRIEF HISTORY OF PERSPECTIVE AND ITS CONNECTIONS WITH GEOMETRY

In this article, we present an example of the mutually beneficial interaction between science and art: just as classical Euclidean geometry helped to develop linear perspective in Renaissance painting, linear perspective paved the way for descriptive and projective geometry. We shed light on the perspective from a theoretical, historical, applied, learning and pedagogical point of view.

Kaj je perspektiva in čemu služi

Perspektiva (v nadaljnjem $\mathcal{P}$) je način grafične reprezentacije objektov, s katerim na sliki (papirju, platnu, zidu, računalniškem zaslonu itd.) pričaramo kar se da prepričljivo “realistično iluzijo” prostorske globine (naslikanega prizora v celoti ali posameznih objektov). Osnovni problem $\mathcal{P}$:

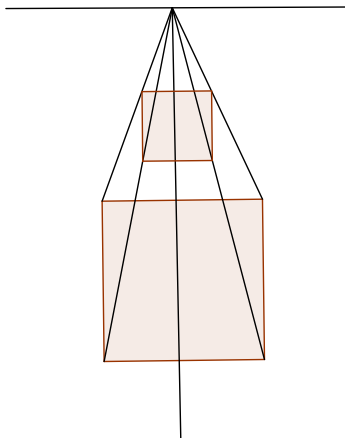
Problem 1. Kako na sliki pričarati videz prostorske globine?

so umetniki različnih dob in kultur reševali na različne načine (na primer s prikazovanjem daljnih objektov kot zakritih z bližnjimi, pa tudi z uporabo toplih in hladnih barv ter različne ostrine upodabljanja bližnjih in oddaljenih predmetov, pa z različnimi projekcijami na ravnino slike, paralelnimi in neparalelnimi itd.) Zato obstaja več vrst $\mathcal{P}$, ne le ena.

V bistvu istemu problemu – ki pa ga razume ožje, zgolj kot geometrijski problem, in ga reformulira kot matematični problem korektne predstavitve 3D-objekta na 2D-ploskvi (s pomočjo tlorisa, narisa in stranskega risa) – se na veliko bolj teoretičen način posveča *tehnično risanje*. Teoretična osnova le-tega je *opisna geometrija*, za očeta katere velja francoski matematik Gaspard Monge (1746–1818); njene tehnike so pomembne tudi v inženirstvu, arhitekturi in oblikovanju.

Linearna perspektiva (v nadaljnjem $\mathcal{LP}$) temelji na dodatni zahtevi: *Upodobljeni predmeti naj bodo prikazani tako, kot jih dejansko vidimo z določene zorne točke* (na primer bolj ko so oddaljeni od opazovalca, manjši se zdijo in bliže skupaj), ne pa naslikani v skladu s tem, kar o njih vemo (na primer, da imajo vsi robovi kocke enako dolžino).

Tako na primer kocke ali kvadra v $\mathcal{LP}$ nikoli ne narišemo z vsemi tremi četvericami vzporednih stranic, ampak kvečjemu z eno ali dvema, vsaj ena četverica vzporednih stranic pa se steka k točki na horizontu – bežišču (Slika 1).



Slika 1. Centralna $\mathcal{P}$. Ena četverica vzporednih robov upodobljenega kvadra na sliki se seka v bežišču, ki leži na horizontu.

Prav po tej večji skladnosti z “optično resnico” (na račun ohranitve pravih razmerij dolžin upodobljenega objekta) se $\mathcal{LP}$ razlikuje od drugih načinov predstavljanja 3D-objektov na ploskvi, na primer *izometrične projekcije*, ki ohranja dolžine (v danem merilu) in vzporednost, in se zato uporablja v tehničnem risanju. Upodabljanje v skladu z načeli $\mathcal{LP}$ je svojevrsten paradoks, saj je po eni strani realistično, objektivno, ker ustreza temu, kar opazovalec dejansko vidi (z določene zorne točke), po drugi strani pa je tudi relativno, subjektivno, ker je odvisno od opazovalca — od kod gleda in v kateri smeri.

Kratka zgodovina $\mathcal{P}$

Preden natančneje pregledamo osnovne pojme in načela $\mathcal{LP}$, ki so jih odkrili v renesansi, si na kratko pogledjmo, kako so osnovni problem $\mathcal{P}$ v zgodovini

umetnosti reševali pred tem. Te rešitve niso bile določene samo z večjo ali manjšo stopnjo tehničnih veščin, dostopnih v določenem času, ampak v veliki meri tudi z načinom razmišljanja in kulturnimi značilnostmi posameznih dob ([3], str. 5). Obširen izčrpen pregled zgodovine $\mathcal{P}$ v povezavi z geometrijo podaja na primer knjiga [2].

Za starogrškega filozofa Platona (428-348 pr. n. št.) tega problema sploh ni bilo. Platon je kot idealist par excellence zavračal slikarstvo kot tako, češ da prikazuje le videz, ne pa resničnost stvari, ki so tako ali tako že same le nepopolni posnetki večnih idej. Slikarstvo naj bi bilo torej, ker ustvarja le posnetke posnetkov, dvojno oddaljeno od resničnosti. Po njegovem bi morali slikarji, če že, prikazovati stvari takšne, kot dejansko *so*, ne pa kot se zdijo oziroma kot so videti. Trud za zvesto reprodukcijo videnega po načelih v renesansi razvite $\mathcal{LP}$ bi bil po njegovem a priori nesmiseln. V starejših dobah in kulturah se, morda prav iz takšnih ali podobnih filozofskih razlogov, niso posebej trudili s problemom upodabljanja prostorske globine na ploskvi. Na starogrških vazah so na primer junake in bogove prikazovali v neposrednejšem likovnem jeziku.

V risbah iz časa 31.000 let pr. n. št., odkritih na stenah jame *Chauvet-Pont-d'Arc*, so našli primere skupin živali (konjev), ki učinkovito zakrivajo druga drugo in tako ustvarjajo občutek globine prizora.

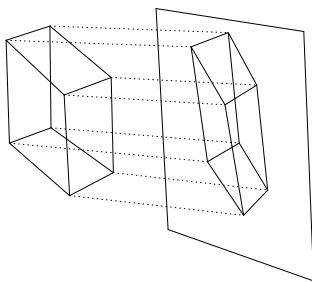
Eden od starejših načinov upodabljanja prostora je bila *vertikalna* $\mathcal{P}$, pri kateri so bili bolj oddaljeni predmeti narisani v višjih vzporednih pasovih, kar je omogočilo, da (vsaj na sliki) bližnji predmeti ne zakrivajo bolj oddaljenih (primer: *Kmet orje polje ob reki*, egipčansko slikarstvo, 13. stoletje pr. n. št.).

V stari japonski umetnosti so pogosto prizori z ljudmi na ulici prostorsko jasno in izrazno učinkovito prikazani kot videni iz zgornje galerije, vzporedne linije prizora pa so na pravokotnih slikah upodobljene z vzporednimi poševnimi črtami.

Kitajski umetniki so od 1. in 2. do 18. stoletja uporabljali podobno *poševno projekcijo*, ki se sicer danes splošno uporablja pri tehničnem risanju. Pri njej se, tako kot pri *ortografski projekciji*, za projiciranje predmeta na ravnino slike uporabljajo vzporedni žarki, ki pa nanjo ne padajo pod pravim kotom, ampak poševno (Slika 2).

Zametke $\mathcal{LP}$ najdemo že pri očetu geometrije, starogrškem matematiku Evklidu iz Aleksandrije (365-275 pr. n. št.), čeprav si z njimi starogrški slikarji niso znali ali niso hoteli pomagati. Evklid je v svoji *Optiki* [6] razvil popolno teorijo o tem, kako vidimo. S konceptom zornega stožca je pojasnil, zakaj imamo omejen zorni kot, zakaj se vzporedne premice v daljavi navidezno sekajo, in zakaj so oddaljeni predmeti videti manjši. Narobe je predpostavil le, da iz opazovalčevega očesa izhajajo nekakšni žarki; danes vemo, da so to v resnici sončni žarki, ki se od predmetov odbijajo v oko.

Evklid je svojo *Optiko* zasnoval podobno kot *Elemente*, na aksiomatski



Slika 2. Poševna perspektiva.

način. Tako je vse izreke v njej dokazal z logičnim sklepanjem iz osnovnih postulatov, v katerih je predpostavil: 1. da se pravokotni žarki, ki izhajajo iz očesa, razhajajo v nedogled; 2. da je telo, ki ga vsebuje niz vidnih žarkov, stožec, katerega vrh je v očesu, osnovna ploskev pa na površini vidnih predmetov; 3. da se vidijo tiste stvari, na katere padajo vidni žarki, in da se ne vidijo tiste stvari, na katere vidni žarki ne padajo; 4. da so stvari, ki jih vidimo pod večjim kotom, videti večje, da so tiste, ki jih vidimo pod manjšim kotom, videti manjše, da so tiste, ki jih vidimo pod enakim kotom, videti enake; 5. da so stvari, ki jih vidijo višji vidni žarki, videti višje, stvari, ki jih vidijo nižji vidni žarki, pa nižje; 6. podobno se stvari, ki jih vidimo z žarki bolj desno, zdijo bolj desne, stvari, ki jih vidimo z žarki bolj levo, pa bolj leve; 7. da so stvari, ki jih vidimo pod več koti, vidne jasneje.

Rimsko slikarstvo, kot neposredni naslednik starogrškega, že kaže številne primere arhitekturnih prostorov, ki so prikazani s pomočjo bežišč in predstavljajo dober, čeprav verjetno teoretično še ne zavestno domišljen, približek $\mathcal{LP}$ perspektive. Vendar načelo, da se vse vzporednice sekajo v isti točki, še ni usvojeno. Včasih vzporednice celo ostajajo vzporednice tudi na sliki. V bizantinskem slikarstvu (iz obdobja po zatonu zahodno-rimskega imperija v vzhodno-rimskem imperiju, ki je trajal do padca Konstantinopla 1453) najdemo na nekaterih ikonah primere nekakšne *obratne perspektive*, pri kateri so bolj oddaljeni predmeti prikazani kot večji, vzporedne črte pa se proti vrhu slike oddaljujejo namesto zbližujejo. V srednjem veku so bili prejšnji dosežki na področju $\mathcal{P}$ pozabljeni: naturalistično predstavljanje resničnosti in iskanje fizične lepote in popolnosti nista bila več zanimiva. Prostor je postal nekaj simboličnega in idealiziranega, naturalistično načelo ene same zorne točke je bilo opuščeno ([3], str. 7).

Za konec srednjeveškega slikarstva in začetek renesančnega slikarstva velja leto rojstva Giotto di Bondone (1266-1337). Načela $\mathcal{LP}$ so formulirali italijanski umetniki in arhitekti, kot na primer Leon Battista Alberti (1404-

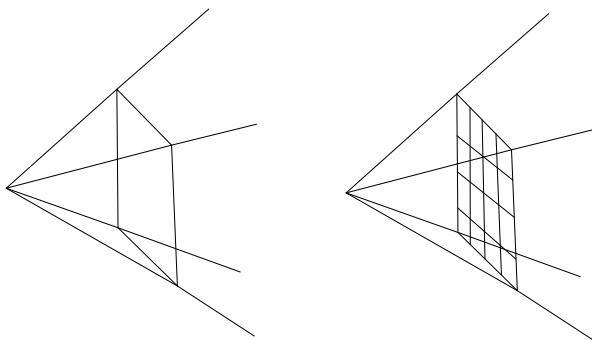
1472), Filippo Brunelleschi (1377-1446), Piero della Francesca (1415-1492), Paolo Uccello (1397-1475), Leonardo da Vinci (1452-1519). V začetku je $\mathcal{LP}$ nastala iz želje, realistično prikazati na primer zunanost in notranost stavb, pa tudi ceste in trge ter s kvadratno mrežo tlakovana tla. Z njo so lahko tudi risali ljudi, drevesa in predmete v pravih velikostnih razmerjih. Do renesanse človeških figur na isti sliki niso prikazovali različno velikih, tudi če so bile bolj oddaljene od opazovalca. V renesansi se začne takšno "skrajševanje". Tako je na primer pri italijanskem slikarju Pietru Peruginu (1450-1523) perspektivni prostor na freski *Izročitev ključev* (1481-82) že usklajen z velikostjo figur. Prve takšne slike so bile narisane v enobežiščni središčni perspektivi, na primer *Sveta trojica* (1425) italijanskega slikarja Masaccia (1401-1428).

Pot do odkritja načel $\mathcal{LP}$, ki so sama po sebi sicer enostavna in se nam danes zdijo nekaj samoumevnega, ni bila ne lahka ne hitra. Duccio di Buoninsegna (1278-1319) je že poskušal realistično prikazati prostor, a je pri tem še delal napake, na primer pri svoji *Zadnji večerji* (1311) se vzporednice še ne sekajo v eni sami točki, miza, ob kateri sedijo apostoli, tudi ni postavljena v pravi $\mathcal{LP}$. Brunelleschi se je na primer že zavedal, da leži točka, na kateri se sekajo vzporednice, na horizontu, in da je poravnana s točko, iz katere gleda opazovalec (Slika 1). Prišel je tudi do pomembnega spoznanja, da $\mathcal{LP}$ predpostavlja, da opazovalec gleda s točno določene točke z enim samim očesom, ki ga ne vrti sem in tja. To je pomenilo upoštevanje dejstva, da človekovo videnje temelji na gledanju z očmi, in pomagalo k poenotenju kompozicije.

Alberti je v delu *De pictura* (1435) pomembno prispeval k teoretičnim osnovam za mehanično korektno reprodukcijo vidnega prizora na sliki. Prepričan je bil, da lahko slika zvesto posnema naravo le, če je prizor ugledan z določenega mesta in če se upoštevajo skrajšave oddaljenih objektov. Njegova ideja zorne piramide je bila neposredna nadgradnja Evklidovih formulacij. Utemeljena je bila na ideji, da se od opazovanega objekta svetlobni žarki stekajo v opazovalčevo oko; če piramido teh žarkov presekamo z navpičnim (na primer steklenim) zaslonom, se na njem pojavi slika, ki jo je treba samo še zvesto prenesti na platno ali papir, in že dobimo natančen duplikat vidnega objekta (Slika 3 levo).

Nemški slikar in grafik Albrecht Dürer (1471-1528) je to idejo nadgradil tako, da je zaslon opremil s kvadratno mrežo in tako dobil risalni okvir, ki močno olajša pravilno umestitev ključnih točk prizora na sliko (Slika 3 desno).

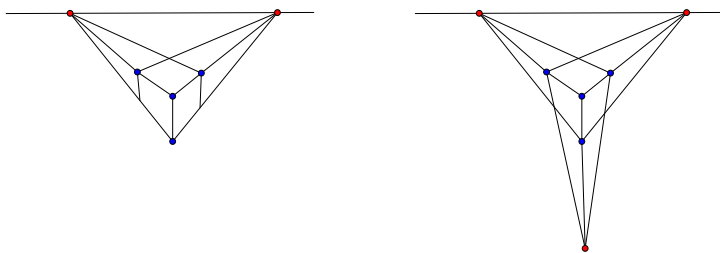
"*Item Perspectiva ist ein lateinisch Wort, bedeutet ein Durchsehung.*" ("Izraz perspektiva je latinska beseda, pomeni gledati skozi.") je zapisal. Nekateri Dürerjevi lesorezi prikazujejo mehanizem, ki so ga uporabljali za risanje prizorov v $\mathcal{P}$. Umetnik gleda skozi luknjico, zato da se njegova zorna točka med risanjem ne spreminja. Obrise modela gleda skozi prozoren nav-



Slika 3. Zorna piramida z vrhom v opazovalčevem očesu in navpičnim zaslonom kot osnovno ploskvijo, ter razdelitev tega zaslona s kvadratno mrežo.

pičen zaslon z narisano kvadratno mrežo. Tako zlahka prenese ustrezno sliko na platno ali papir s podobno mrežo (v poljubno izbranem merilu). V razpravi *Underweyßung der Messung* (1525) je Dürer opisal tudi dvobežiščno perspektivo, ki jo je sicer prvi z diagramom prikazal Jean Pélérin v *De Artificiali perspectiva* (1505), prvi tiskani razpravi o $\mathcal{P}$. Dürer je po svojem potovanju v Italijo močno pripomogel k širjenju risanja v $\mathcal{P}$ v Nemčiji.

Leonardo se je v svojih zapisih o $\mathcal{P}$ naslonil na Albertijevo idejo steklenega zaslona, na katerega površino rišemo objekte, vidne za njim. Isti koncept je tudi v ideji camere obscurae, ki je 1822 kulminirala v izumu fotografije, ko je Francoz Nicéphore Niépce izumil prvo fotografsko tehniko, heliografijo. Prav fotografija je umetnikom (v poznem 19. stoletju) odprla oči tudi za tribežiščno perspektivo (Slika 4 desno).



Slika 4. Kocka v dvobežiščni in tribežiščni $\mathcal{P}$

Sicer pa je Leonardo vztrajal, da mora umetnik zaupati predvsem svojim

lastnim sposobnostim opazovanja, in se ne sme pustiti preveč voditi teorijam. Njegov največji prispevek k $\mathcal{P}$ pa so, poleg samih slik in fresk, kot je na primer *Zadnja večerja*, ter risb poliedrov s praznimi lici in odebeljenimi robovi, ki jih je narisal kot ilustracije za razpravo *De Divina proportione* (1509) italijanskega matematika Luce Pacioli (okoli 1445/47-1517), tudi njegove raziskave o barvah predmetov glede na njihovo razdaljo od opazovalca. Opazil je, da zaradi zraka, ki ni povsem prozoren, oddaljeni predmeti postanejo bolj modri, njihovi obrisi pa postajajo vse bolj zabrisani.

Slikar Rafael Sanzio (1483-1520) je povezal nauke Leonarda ter kiparja in arhitekta Michelangela Buonarottija (1475-1564) in ustvaril umetniška dela z velikim občutkom za kompozicijo in pravilno uporabo perspektive, na primer *Atenska šola* (1509-1511), ter tako proizvedel sintezo, ki najbolje predstavlja visoko renesanso ([3], str. 9).

V naslednjih stoletjih so umetniki $\mathcal{P}$ vse bolj avtomatično uporabljali, šteta je bila za logično obliko predstavitev. Izum fotografije je morda k temu naziranjju še dodatno pripomogel.

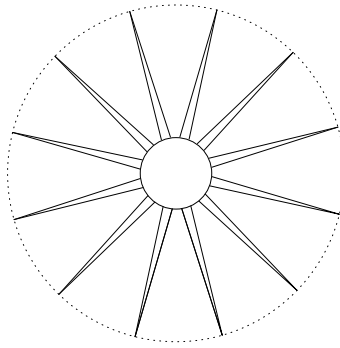
Vendar se je slikarstvo sčasoma izvilo iz tega "matematičnega" načina upodabljanja prostora kot edino pravilnega. Ob koncu 19. stoletja so post-impresionisti začeli z drugačnim upodabljanjem prostora, pod močnim vplivom orientalske umetnosti, ki je takrat vzbudila veliko pozornost v Evropi. Paul Gauguin (1848-1903) je slikal slike, pri katerih je prostor zaradi uporabe barv deloval sploščeno. Vincent Van Gogh (1853-1890) je v svojih kompozicijah izkrivljal prostor. Paul Cézanne (1839-1906) je naravne oblike izražal z osnovnimi geometrijskimi oblikami: kroglo, valjem, stožcem. Vsi ti umetniki so še vedno ohranjali osnovo $\mathcal{P}$, medtem ko jo je umetniška avantgarda v XX. stoletju pogosto opuščala. Danes se v slikarstvu $\mathcal{P}$ uporablja kot ena izmed možnih tehnik, ni pa to več edini pravilni način slikanja.

$\mathcal{LP}$ so nekateri umetniki, na primer M.C. Escher (1898-1972) uporabili tudi za prikaz različnih *optičnih iluzij* oz. nemogočih objektov, kot je na primer stopnišče s kvadratnim tlorisom, po katerem se je mogoče ves čas bodisi vzpenjati bodisi spuščati. Tipičen "nemogoč" objekt je tudi *Penrosov trikotnik*, ki ga je sicer prvi ustvaril švedski umetnik Oscar Reutersvärd 1934, neodvisno od njega pa sta ga odkrila in popularizirala v petdesetih letih psihiater Lionel Penrose in njegov sin matematik in Nobelov nagrajenec Roger Penrose. Vendar je zanimivo, da je na primer možen 3D-trikotnik z ukrivljenimi odebeljenimi robovi, ki je od spredaj videti kot Penrosov trikotnik; odkril ga je Mathieu Hamaekers (prikazan je v knjigi [5], str. 72,93).

Slikarji in teoretiki so v XX. stoletju ([4]) razvili sisteme *krivočrtne* $\mathcal{P}$ s štirimi, petimi in celo šestimi bežišči, ki v določenih primerih upodabljajo videno bolje in natančneje kot $\mathcal{LP}$. Vendar primere krivočrtne $\mathcal{P}$ najdemo že veliko prej, na primer na odsevanih podobah v zrcalu s slavne slike *The Arnolfini Portrait* (1434), ki jo je naslikal nizozemski slikar Jan Van Eyck

(okoli 1390 - okoli 1441).

Omenimo še “otroško perspektivo”. Otrok, ki riše ulico s hišami ob njej, marsikdaj nariše sliko tako, kot jo doživi, in ne tako, kot jo vidi: ulica je ves čas enako široka, hiše pa so nanjo postavljene pravokotno. Tudi ta način risanja ni povsem neuporaben: če na primer pogledamo pariško zvezdo ulic okrog Slavoloka zmage visoko iz ptičje perspektive, bomo videli 12 ulic, katerih robovi se stekajo k različnim točkam na okroglem horizontu oz. robu osnovne ploskve zornega stožca (Slika 5). Vz dolž njih bi res lahko razporedili risbe hiš, katerih navpičnice bi z robovi ulic oklepale prave kote.



Slika 5. Pogled iz ptičje $\mathcal{P}$ na pariško zvezdo okrog Slavoloka zmage: 12 ulic se steka k 12 bežiščem na okroglem horizontu.

Ob vsem tem se lahko spomnimo problema prikaza ukrivljene zemeljske oble z zemljevidom. Znano je, da nobena od številnih možnih projekcij ne ohranja vseh elementov (kotov in dolžin) ter plosčin takih, kot so dejansko. Vsaka ima svoje prednosti in svoje pomanjkljivosti. Enako je z različnimi sistemi $\mathcal{P}$ — nobeden izmed njih ni edino možen oziroma najboljši v vseh pogledih.

Od slikarjev so štafeto nadaljnjega razvijanja teorije $\mathcal{P}$ prevzeli matematiki, ki so razvijali matematično teorijo $\mathcal{P}$ (na primer Guidobaldo, Stevin, Lambert).

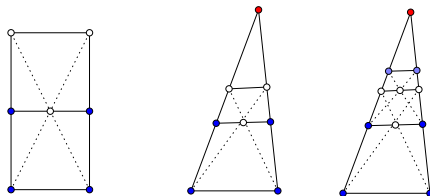
V teoriji $\mathcal{LP}$ so implicitno vsebovani osnovni pojmi in načela opisne in projektivne geometrije (na projektivni ravnini se na primer vzporedne premice iz evklidske ravnine sekajo v tako imenovani točki v neskončnosti, prav tako kot se vzporedne premice v $\mathcal{LP}$ sekajo v bežišču). Vendar se zdi, kot kaže material, zbran v [2], da slikarska teorija $\mathcal{P}$ ni neposredno vplivala na matematični razvoj teh geometrij.

S pomočjo projektivne geometrije in teorije grup je Felix Klein (1849-

1925) v svojem znanem *Erlangenskem programu* (1872) klasificiral večino geometrij, znanih do konca 19. stoletja.

Tipičen izrek, ki sodi v projektivno geometrijo, je na primer znani Pappusov izrek; na projektivni ravnini obstajajo tudi druge konfiguracije točk in premic, ki so danes eno od intenzivno proučevanih področij geometrije (glej na primer [8], [10]).

Projektivna geometrija omogoča elegantne dokaze oz. rešitve nekaterih sicer težje dokazljivih izrekov oz. problemov evklidske geometrije. Tako se na primer lastnost konkurentnosti (tri premice ali daljice se sekajo v isti točki) ohranja pri projektivnih transformacijah; ker le-te omogočajo poljuben trikotnik preslikati na enakostranični trikotnik, so težiščnice v vsakem trikotniku konkurentne, ker velja to za enakostraničen trikotnik. Podobno sklepanje je v osnovi tako imenovanega *trika X* v $\mathcal{LP}$, ki omogoča na primer ob kvadrat, narisani v $\mathcal{LP}$, narisati še enega, in to ponavljati v neskončnost (Slika 6).

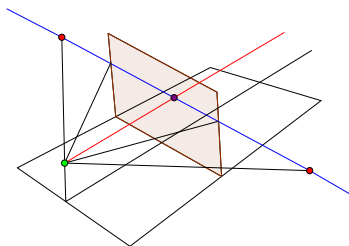


Slika 6. Trikotnik X za dorisovanje kvadratov k prvotnemu kvadratu v pravilni perspektivični skrajšavi.

Osnovni pojmi in načela $\mathcal{LP}$

Osnovni pojmi $\mathcal{LP}$ so: zorna točka, zorni stožec, osnovna ravnina, ravnina slike, osnovna premica, zorna premica, horizont, bežišča, regulacijske črte (Slika 7). Pri nadaljnji razlagi teh pojmov so dodani angleški izrazi in njihove kratice, uveljavljeni v angleški literaturi o $\mathcal{LP}$; v slovenski literaturi nimamo povsem poenotenih standardnih izrazov za te pojme.

Ravnina slike (angl. picture plane, P.P.) je namišljena ravnina, na kateri nastane slika kot navpični prerez zorne piramide. Ustrezno slikarskemu platu ali papirju. *Zorna točka* ali gledišče (angl. viewpoint, V.P.) je točka, s katere opazovalec gleda; $\mathcal{LP}$ predpostavlja, da gleda z enim samim očesom, za razliko od tako imenovane *bicentrične* $\mathcal{P}$, ki je študija projekcije tridimenzionalnega prostora iz para referenčnih točk in ne iz ene same [7]. *Zorni stožec* ali vizualni stožec (angl. cone of vision, C.V.) ustreza vidnemu polju, ki ga zajame opazovalčev pogled. Vrh stožca je v opazovalčevem očesu. Tvo-



Slika 7. Ravnina slike (navpična) je vselej pravokotna na zorno premico, ki poteka od zorne točke do točke v fokusu na ravnini slike. Bežišči sta na črti horizonta.

rijo ga žarki svetlobe, ki potujejo od opazovanega objekta k očesu. *Osnovna ravnina* (angl. ground plane, G.P.) je ravnina, na kateri stoji opazovalec in upodobljeni predmeti. *Osnovna premica* (angl. ground line, G.L.) je presek osnovne ravnine in ravnine slike. *Zorna premica* (angl. central visual ray, C.V.R.) je premica od zorne točke do ravnine slike, pravokotna na ravnino slike. *Horizont* ali črta obzorja (angl. horizon, H.) je namišljena vodoravna črta na višini opazovalčevih oči. *Bežišča* ali očišča (angl. vanishing points, V.P.) so točke na horizontu, v katerih se srečajo vzporedne premice, ki se oddaljujejo od opazovalca. Glede na tip perspektive ločimo enobežiščne, dvobežiščne in tribežiščne (te se uporabljajo bodisi za pogled iz ptičje bodisi iz žabje perspektive). *Regulacijske črte* nam pomagajo pri risanju v $\mathcal{P}$ (na primer stopnic, telegrafskih drog v ravni vrsti itd.).

Čeprav so *osnovna načela* $\mathcal{LP}$, kot so; zmanjšanje, skrajševanje, konvergenca, prekrivanje, barvna in vrednostna perspektiva, perspektiva podrobnosti in vzorcev, učinek ostrenja (angl. diminution, foreshortening, convergence, overlapping, color and value perspective, detail and pattern perspective, focus effect) razmeroma preprosta (glej na primer [1]), je treba za učenje njenih konkretnih tehnik in postopkov (kot so na primer risanje n -kotniških pravilnih prizem, risanje stopnic, senc in zrcalnih odsevov; risanje objekta v $\mathcal{LP}$ v pravih razmerjih na podlagi njegovega tlorisa, narisa in stranskega risa itd.) vložiti kar nekaj truda. To temeljno znanje, potem ko ga z veliko študija, vaje, opazovanja in razmišljanja, dobro osvojimo, nam omogoča, da korektno rešimo praktično vsak problem $\mathcal{LP}$ oz. opisne geometrije. To je dobro storiti tudi v primeru, da se kasneje poslužujemo kakšnega računalniškega ali spletnega orodja za risanje v takšni ali drugačni $\mathcal{P}$ oz. projekciji (linearni, paralelni, vojaški itd.), kot ga uporabljajo na primer arhitekti, inženirji, dizajnerji, pa tudi umetniki.

Učenje $\mathcal{LP}$: kako začeti

$\mathcal{LP}$ danes poleg ilustratorjev, animatorjev in slikarjev (ki jo uporabljajo kot eno od možnih orodij, včasih pa njena načela tudi zavestno kršijo oziroma ignorirajo), s pridom uporabljajo tudi arhitekti, scenografi in oblikovalci notranjih prostorov ter inženirski oblikovalci. Poznavanje njenih načel (teorija) in sposobnost njihove uporabe (praksa) ne škodi tudi matematiku, ki želi na primer učencem z realistično risbo prikazati preprosta geometrijska telesa (na primer kocko v perspektivi), ali jim pokazati, da so tudi osnovne oblike v naravi (cvetovi, plodovi, oblike živali itd.) sestavljene iz osnovnih oblik (krogov, elips, valjev itd.), ki jih z malce poznavanja geometrije in malce poznavanja perspektive zlahka narišemo precej realistično. Pri risanju v $\mathcal{LP}$ (bodisi prostoročnem bodisi z ravnilom ali s kakšnim računalniškim orodjem) moramo pozabiti, kar vemo o objektu, ki ga rišemo, in risati tisto, kar vidimo. Tako se na primer zdi, da se vzporedna robova ravne ceste ali železniškega tira v daljavi srečata v točki, čeprav vemo, da je razdalja med njima ves čas enaka.

Vendar je, ker so $\mathcal{LP}$ razvili umetniki, nima pa vsakdo umetniškega talenta, umestno vprašanje: *Se lahko vsakdo nauči risati (vsaj razmeroma preproste geometrijske objekte, kot so na primer kocke, kvadri, poliedri) po načelih $\mathcal{LP}$?*

Če nimamo posluha, se zelo težko naučimo zapeti pravilne višine tonov. Vseeno pa lahko, če imamo smisel vsaj za ritem in smo se pripravljene naučiti glasbene pisave, z dovolj vaje in truda igramo preproste skladbe na inštrumentih s tipkami, na primer na klavir. Dejansko se lahko osnovnih načel $\mathcal{LP}$, ki je bolj tehnika kot umetnost, teoretično naučimo razmeroma hitro. Še posebej lahko se jih naučimo matematiki (in fiziki), saj je sama teorija izrazito matematična (temelji namreč na optiki oziroma geometriji). Podobno velja tudi za praktično učenje: tudi če nimamo posebnega talenta in risarsko nismo najbolj spretni (na primer ne znamo prostoročno narisati lepe elipse), lahko vseeno rišemo v $\mathcal{LP}$, tako da si pomagamo na primer z GeoGebro. Na ta način se lahko tudi lažje naučimo samih osnov teorije $\mathcal{LP}$.

Najhitreje se naučimo $\mathcal{LP}$, če preštudiramo čim več različnih knjig o tej temi, ki jo osvetljujejo iz različnih vidikov:

1. *praksa, risanje*: Začnemo lahko na primer s preprostim priročnikom za risanje v $\mathcal{P}$ z malo teorije, a veliko praktičnimi vajami, na primer [1]. Obiščemo lahko tečaj risanja.

2. *opazovanje, razmišljanje*: V knjigah o umetnosti ali na spletu poiščemo in pozorno opazujemo čim več klasičnih slik na to temo. Preberemo ustrezne komentarje in razlage teh del. Ogledamo si videe o risanju v $\mathcal{P}$ na spletu.

3. *teorija, znanje*: Potem lahko posežemo po bolj teoretičnih delih o matematičnih osnovah $\mathcal{LP}$ (bodisi zgodovinskih, kot je na primer Evklidova

Optika [6], bodisi iz sodobnosti), o optičnih iluzijah [5], o krivočrti $\mathcal{P}$ [4], itd.

4. *uporaba računalniških orodij*: Na spletu se zlahka dobijo prosto dostopna orodja za risanje v $\mathcal{LP}$. Na voljo pa so tudi plačljive profesionalne verzije, uporabne predvsem za arhitekte, dizajnerje in inženirje, pa tudi za likovne umetnike, risarje stripov in animiranih filmov.

Za popoln uspeh v obvladovanju veščine risanja v $\mathcal{P}$ ni dovolj samo razumeti načela $\mathcal{P}$, treba je tudi veliko, vztrajno in potrpežljivo risati oziroma vaditi, razmišljati, opazovati in se učiti. Le tako ne bomo osvojili le nekaj posebnih tehnik za risanje zgolj določenih vrst objektov (na primer stopnic, vzorcev na preprogi itd.), ampak bomo sposobni rešiti vsak risarski problem, ki se nanaša na perspektivo.

Učenje $\mathcal{P}$ neizogibno poteka v korakih, skozi različne stopnje. Na osnovni ravni zadošča, če spoznamo nekaj osnovnih pojmov in načel iz priročnikov za risanje. V njih dobimo zelo praktična in konkretna navodila za risarske vaje. Sčasoma se začnemo spraševati, kako so sploh odkrili ta pravila, in kako so teoretično utemeljena. Zaznamo namreč določeno nelagodje ob njihovi uporabi. Pojavi se dvom, ali so ta pravila stoprocentno uporabna v vseh primerih.

Nato začnemo študirati zgodovino $\mathcal{P}$. Presenečeni odkrijemo njen simbolični pomen in spoznamo, da pojem prostora ni bil vselej tako "matematičen", kot si ga zamišljamo že nekako od Newtona dalje (homogen, kontinuiran, neskončen); ni bil vselej razumljen kot absolutni prostor, ki obstaja pred vsemi predmeti. V knjigi *Perspektiva kot simbolična oblika* [9], osrednji knjigi 20. stoletja o $\mathcal{P}$, ki je znana tudi zunaj krogov umetnostne zgodovine, član warburške skupine Erwin Panofsky očrtuje obravnavanje $\mathcal{P}$ od klasičnih časov do danes in povezuje uravnavanje prostora z značilnim svetovnim nazorom določenega časa.

Konkretne metode, triki in postopki za risanje v $\mathcal{LP}$

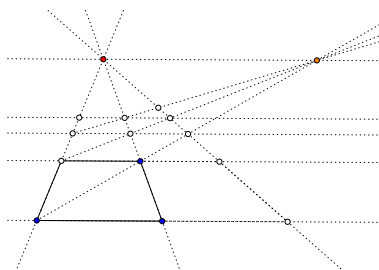
Pri učenju risanja v $\mathcal{LP}$ po navadi začnemo z risanjem kocke ali kvadra ali pravilnih prizem, kar nam potem pride prav pri *metodi škatle* (angl. box method), s katero lahko potem zlahka narišemo predmete drugih, manj pravilnih oblik, umeščenih v te škatle. Podobno uporabni so *osnovni geometrijski objekti*, kot so krogle, valji, stožci in piramide, ki nam pri risanju služijo za razstavitev zapletene oblike na preprostejše.

V $\mathcal{LP}$ se oddaljeni *krogi* spremenijo v vse bolj sploščene elipse, pri čemer pa središče upodobljenega kroga, ki sovпада s presečiščem diagonal krogu očištanega kvadrata, ne leži na presečišču osi ustrezne elipse, ampak malo dlje, bliže horizontu.

V $\mathcal{LP}$ moramo znati risati tudi *sence ter osenčene strani predmetov*

(angl. shadows and shades), pri čemer sončne žarke obravnavamo kot vzporedne, žarke svetlobe iz svetilk pa kot radialno izvirajoče iz določene točke. Posebna, dokaj zahtevna tema so tudi *zrcaljenja predmetov v vodi in zrcalu* (glej na primer [11]). Poleg splošnih načel je treba za uspešno risanje v $\mathcal{LP}$ osvojiti še nekaj posebnih postopkov, s katerimi narišemo določene zahtevnejše objekte, na primer stopnice, preproge, šahovnice, ograje.

Pri risanju si lahko pomagamo s kvadratnimi koordinatnimi mrežami, ki jih lahko uporabimo na primer za transformacijo zemljevida, izvirno narisane v $\mathcal{LP}$, v prizor, narisane v kakšni drugi $\mathcal{P}$ (paralelni, obratni itd.). Če smo kvadratno koordinatno mrežo narisali na primer z GeoGebro, potem lahko to transformacijo koordinatne mreže in vseh točk in črt vanjo vrisane zemljevida naenkrat izpeljemo že s spremembo prosto gibljivih točk enega samega kvadrata, in že se vsa mreža in slika na njej avtomatično transformira v želeno $\mathcal{P}$ (Slika 8).



Slika 8. Konstrukcija kvadratne mreže iz osnovnega kvadrata.

Koristno je znati tudi narisati daljico (na ravnini tal) v pravilni $\mathcal{P}$, saj lahko potem vsakršno risbo na kvadratni mreži (na primer tlorise stavb nekega naselja) sestavimo iz daljic in narišemo v pravilni $\mathcal{P}$.

Merjenja dolžin navpičnih in vodoravnih črt in pomembnost višine horizonta.

S pomočjo znane višine horizonta (na primer $h = 1,75m$) lahko določimo višino navpičnih in dolžino vodoravnih črt na sliki, narisanih v $\mathcal{LP}$. Tako so na primer vsi ljudje, ki imajo vrh glave v višini horizonta, enako visoki. Drevo, ki ima eno petino debla pod horizontom, štiri petine pa nad njim, ima dolžino $5h$. Če je dolžina vodoravne črte m -kratnik njene razdalje od horizonta, je njena dolžina mh .

Spreminjanje višine horizonta vpliva na razmerja višin. Dve enako veliki osebi, ki stojita druga za drugo, določata dve vzporednici, ki se bosta na sliki sekali v nekem bežišču na horizontu. Vse navpičnice med tema dvema

črtama imajo enako dolžino (podobno kot pri telegrafskih drogovi). Če pa horizont znižamo, se bo druga oseba zdela višja od prve. Izčrpneje to razloži naslednji citat iz knjige ([12]): “V slikarstvu je bil dolgo priljubljen visok horizont, zlasti v 16. stoletju, ko pokrajina še ni bila samostojna slikarjeva tema, ampak le ozadje za upodabljanje cerkvenih praznikov, bitk ali biblijskih prizorov. Visok horizont je slikarju puščal dovolj prostora, da je dal duška svojemu umetniškemu navdihu. Po tem je najbolj znan slikar Pieter Brueghel starejši (okoli 1525-1569). Slikarji so se lahko zadovoljili z nizkim horizontom šele, ko se je spremenil stil risanja pokrajin in so začeli risati na primer tudi oblake. O tem govorijo slike, ki so nastale okrog 1600.”

$\mathcal{LP}$ pomaga predvsem pri risanju objektov z ravnimi vzporednimi črtami, čeprav je tudi risanje zahtevnejših poliedrov po njenih zakonih zapletena naloga – pomislimo samo na polieder iz Dürerjeve grafike *Melanholijs* (1514). Za risanje organskih oblik iz narave (cvetov, dreves, oblakov itd.) pa je še vedno bolj kot teorija in sestavljanje zapletenih oblik iz preprostih geometrijskih oblik (krogle, valja, stožca, lijaka itd.) ključno natančno opazovanje, kot ga je priporočal Leonardo.

$\mathcal{P}$ glede na število bežišč

Kakšno vrsto $\mathcal{P}$ in s koliko bežišči uporabiti za risanje danega objekta? To je odvisno od njegove lege glede na opazovalca ter na ravnino slike in horizont.

Najpreprostejši je primer, ko gleda opazovalec naravnost predse (kot bi gledal skozi režo v steni), in ne vrti svojega pogleda zdaj levo, zdaj desno, zdaj navzgor zdaj navzdol. Temu načinu risanja pravimo centralna $\mathcal{P}$. Primerna je za prikaz zgradbe, ki ima sprednjo stran vzporedno ravnini slike. Podaljšane črte vzporednih premic, ki bežijo od nas, se na sliki sekajo v isti točki. Pravimo jim bežišče (angl. vanishing point). Bežišče pri centralni $\mathcal{P}$ natančno ustreza preseku zorne premice (ki izhaja iz opazovalčevega očesa) in ravnine slike. Bežišče (eno samo) je pri centralni $\mathcal{P}$ nekje na sliki. Po navadi ga ne umestimo povsem v središče slike. S tem dosežemo, da je slika bolj razgibana (sicer je preveč statična). Centralno $\mathcal{P}$ je na primer uporabil Piero della Francesca na sliki *Bičanje Kristusa*, nastali v letih 1455–1460. S centralno $\mathcal{P}$ lahko narišemo le tiste prostore, ki se razprostirajo v smeri pogleda, objekti v prostoru pa so postavljeni tako, da smer pogleda sekajo pod pravim kotom.

Če pa pogledamo na objekt (na primer zgradbo z osnovno obliko kvadra) od strani, dobimo dve skupini vzporednih črt in vsaka se seka v svojem bežišču. To je $\mathcal{P}$ z dvema bežiščema. Lahko jo uporabimo tudi za tlakovanje tal sobe ali trga s kvadrati. Pri vijugasti poti, ki se oddaljuje od nas, imamo lahko celo več bežišč. Vsa bežišča ležijo na isti vodoravni črti, ki ji pravimo horizont. Na obali morja horizont ustreza črti med morjem in nebom. Pri

ravni pokrajini ustreza črti med zemljo in nebom.

Risbe s tremi bežišči dobimo na primer, če rišemo nebotičnik, ki ga gledamo od spodaj (iz žabje perspektive) ali od zgoraj (iz ptičje $\mathcal{P}$). Če bi gledali nebotičnik pred seboj iz sredine nekega drugega nebotičnika, bi nam pogled taval zdaj gor, zdaj dol, zdaj levo, zdaj desno, in bi imeli zato na sliki kar štiri očišča, ustrezajoča temu nebotičniku, katerega navpične robove bi videli kot rahlo ukrivljene oz. kot krožne loke. Ta primer jasno kaže, da ima uporaba $\mathcal{LP}$ svoje meje.

Meje uporabnosti $\mathcal{LP}$

Načela $\mathcal{LP}$ so odkrili umetniki v renesansi, dobi, ki je po zgledu antike poudarjala vrednost človeka in je poleg humanistične izobrazbe enako cenila tudi natančno opazovanje narave. Nastala je iz potrebe rešiti “nemogoč” problem, porojen tako iz same slikarske prakse kot tudi iz duhovnih in filozofskih razmišljanj tistega časa:

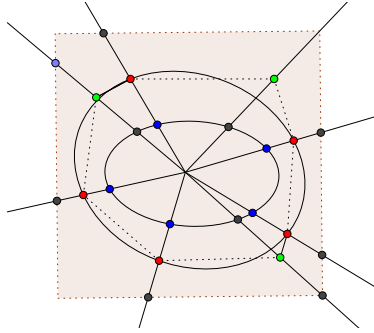
Problem 2. Kako upodobiti izbrani prostor ali objekt, da bo slika natančen odraz tega, kar dejansko vidimo z določene zorne točke?

Takšna “idealno realistična” upodobitev “optične resnice” objekta naj bi zvesto prikazala objekte v prostoru in njihovo medsebojno lego, upoštevala pa naj bi tudi navidezne skrajšave objektov zaradi njihove oddaljenosti od opazovalca. Toda, ali je sploh mogoče na ravni sliki natančno prikazati, kar vidimo z očesom (oziroma z lečo sferične oblike)? Ta problem spominja na podobno “nemogoče” probleme (v matematiki in drugod), pri katerih se moramo zadovoljiti z najboljšimi približki rešitev, ker rešitve v strogem smislu ni. Tako na primer v kartografiji poskušamo z različnimi kartografskimi projekcijami na ravnino, stožec ali valj prikazati razporeditev celin in oceanov po ukrivljeni zemeljski obli. Pri tem prevodu se vedno nekaj izgubi: ali koti, ali dolžine, ali ploščine. Najstarejšo projekcijo zemeljske oble, *gnomonsko projekcijo* iz središča sfere na katerokoli tangentno ravnino, je iznašel Tales v 6. st. pr. n. št. Pri njej so veliki krogelni krogi (na primer skozi pola) prikazani z ravnimi črtami (poltraki, izhajajočimi iz skupne točke).

Podobno, v linearni algebri (z metodo najmanjših kvadratov) iščemo najboljši približek rešitve matrične enačbe $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ predločenega sistema linearnih enačb, v katerem je več enačb kot spremenljivk, in zato na splošno nima eksaktne rešitve.

In še en primer “nemogočega” problema, ki pa je vseeno dobil rešitev: Nek arhitekt je dobil nalogo na kvadratnem trgu z elipsastim parkom v sredini projektirati najboljšo možno vmesno sprehajalno pot, katere oblika naj bi predstavljala najboljši možni kompromis med ravno in ukrivljeno obliko obeh mejnih površin; kompromisno rešitev je poiskal kot geometrijsko

mesto razpolovišč daljic, ležečih na radialnih žarkih iz središča kvadrata, z enim krajiščem na elipsi in drugim na kvadratu (Slika 9):



Slika 9. "Elipsasti kvadrat" – najboljša srednja pot med elipso in kvadratom; ni ne elipsa ne lomljenka, ampak je neka analitično težje izrazljiva sklenjena krivulja.

$\mathcal{LP}$ naj bi bila, po definiciji, rešitev Problema 2. Vendar, ali to tudi dejansko je? Matematiki vemo, da je mogoče definirati tudi stvari, ki jih ni, kot na primer okrogel kvadrat, ali pa množico vseh množic. Zato je na mestu vprašanje:

Ali je $\mathcal{LP}$ dejansko natančna reprodukcija tistega, kar vidimo z določene zorne točke? Kaj če je tudi $\mathcal{LP}$ le približek rešitve v bistvu nerešljivega problema? Se da to, kar vidimo, dejansko popolnoma zvesto preslikati na ravnino slike, ali pa se moramo (kot v primeru takšne ali drugačne projekcije globusa na ravno ploskev) zadovoljiti le z določenim približkom rešitve? Ali $\mathcal{LP}$ res omogoča, kar od nje pričakujemo (tj. natančno upodabljanje videnega), ali pa v določenih primerih odpove? Ali so možni kakšni drugačni sistemi upodabljanja 3D-prizorov na 2D-ploskvi, ki še bolje ustrezajo temu, kar dejansko vidimo pred seboj?

Da ta vprašanja niso iz trte izvita, lepo kaže naslednji primer oz. miselni poskus: Ali vzporednice opazovanega prizora v smeri levo-desno res vselej vidimo kot vzporedne črte, kot to predpostavlja teorija $\mathcal{LP}$? Če se na primer postavite naravnost pred visok in zelo dolg blok z ravno streho, ki na levi in desni ubeži vašemu pogledu, ali je obris strehe bolj podoben grafu funkcije $f(x) = |1 - x|$ ali krožnemu loku $g(x) = \frac{1}{10}(1 - x)^2$?

$\mathcal{LP}$ izhaja iz predpostavke, da opazovalec gleda prizor iz ene same zorne točke in z enim samim očesom. To je vsekakor poenostavljen model resničnega gledanja. V resnici je naše videnje in občutek prostorske globine rezultat dveh različnih slik, ki prihajata v dvojno oko in ki ju procesirajo naši možgani oziroma um. Tega ni mogoče reproducirati na nobeni sliki. Videnje ni le mehanični akt zaznavanja, podvržen zgolj zakonom optike in

geometrije, ampak je v njem vselej prisotna tudi intenzivna miselna dejavnost (glej 2. poglavje: *Vision as data-processing*, str. 11-20 v [5]). Videnje je vselej tesno povezano z mišljenjem in interpretacijo vidnega. Dva človeka lahko gledata isto, pa ne vidita istega.

S tem se še nekako lahko sprijaznimo. Naslednje vprašanje, ki ga je treba zastaviti, in so ga številni dejansko tudi zastavili, pa je: *Ali je $\mathcal{LP}$ vsaj geometrijsko oziroma optično povsem korektna?* Spomnimo se, da s pomočjo horizonta in regulacijskih črt lahko natančno določimo dolžine navpičnih (in horizontalnih) črt na sliki, narisanih v $\mathcal{LP}$. Nekateri $\mathcal{LP}$ celo definirajo kot sredstvo za določanje razmerij med velikostmi objektov na različnih položajih v prostoru. Pa je to sredstvo dejansko matematično povsem korektno? Ali z njegovo pomočjo vselej dobimo pravilne rezultate? Ni nobenih sistemskih odstopanj od pravih vrednosti?

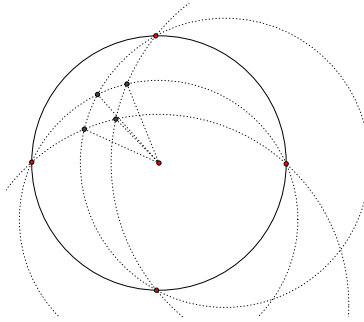
Evklidov osmi izrek iz njegove *Optike* jasno pove, da zaznana velikost predmeta ni povezana z njegovo oddaljenostjo od očesa s preprostim razmerjem. Navidezna razlika v velikosti med dvema enakima objektoma, zaznanimi na različnih razdaljah, ni določena z razmerjem teh razdalj, ampak z razmerjem ustreznih kotov, pod katerima vidimo predmeta. Če renesansa ne bi zamolčala tega Evklidovega spoznanja, bi morala priznati, da je ustvarjanje povsem zveste perspektivne slike nemogoče delo, saj sfere ni mogoče zravnati v ravnino ([9]). Evklidova "perspectiva naturalis" je skušala formulirati zakone naravnega videnja, utemeljene na optiki. Renesansna "perspectiva artificialis" postulira načela, kako naj rišemo, da bomo lahko računali razmerja velikosti predmetov (zavedajoč se kvantitativne napake, izvirajoče iz dejstva, da enakim kotom ne ustrezajo enake projekcije ustreznih lokov na ravnino slike).

Ali ravne črte v naravi res vidimo kot povsem ravne? Tudi to ni vselej res. O tem se lahko prepričamo, če razmislimo, kako bi bil videti zelo visok nebotičnik, ki bi ga gledali iz nasprotnega nebotičnika nekje v višini sredine prvega. Nikjer ne bi videli zlomljenih linij. Če bi slikarji hoteli zvesteje risati, kar vidimo, bi torej (vsaj pri risanju zelo razsežnih objektov) morali risati premice kot ukrivljene črte. Paradoks, da so lahko ravne črte videti kot ukrivljene, in da ukrivljene črte lahko vidimo kot ravne, je bil v antiki dobro znan.

V učbenikih $\mathcal{LP}$, katerih avtorji se zavedajo omejitev $\mathcal{LP}$, najdemo opozorila, da naj rišemo le predmete znotraj zornega kota $30 + 30$ stopinj levo in desno od zorne premice, saj so sicer onstran tega zornega kota, če strogo upoštevamo pravila $\mathcal{LP}$, izkrivljanja od dejansko vidnega prevelika. To pravilo si velja zapomniti.

Krivočrtna $\mathcal{P}$

Primer risanja nebotičnika (omenjen na koncu predprejšnjega razdelka) dejansko presega domet $\mathcal{LP}$. Bolje ga naslavlja *krivočrtna* (tudi: *ukrivljena, krivuljna*) $\mathcal{P}$ (angl. curvilinear perspective), iznajdena v šestdesetih letih 20. stoletja ([4]), pri kateri se premice prizora ne preslikujejo v premice na sliki, ampak bolj na nekakšno krivočrtno mrežo. Tako imamo na primer pri krivočrtni petbežiščni perspektivi bežišča v središču kroga oz. sfere ter v severnem in južnem polu ter točki na vzhodu in zahodu (Slika 10).



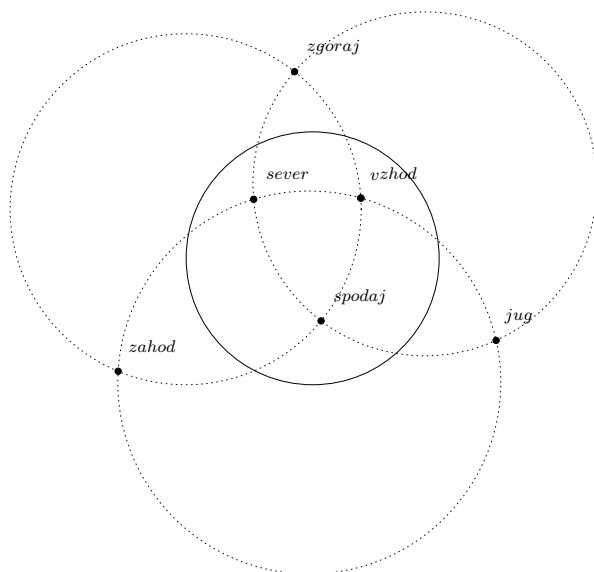
Slika 10. $\mathcal{P}$ s petimi bežišči.

Obstaja tudi krivočrtna perspektiva s 6 bežišči oziroma tremi pari točk, v katerih se stekajo krivulje: zgoraj-spodaj, sever-jug, vzhod-zahod. Navadno so le tri od njih (na primer sever, vzhod in spodaj) znotraj kroga, ki ustreza horizontu oziroma obodu zornega stožca (Slika 11). Uporabimo jo lahko na primer za sliko kocke s tremi četvericami ukrivljenih stranic; vsaka četverica je naslikana s krožnimi loki med pari bežišč sever-jug, vzhod-zahod in zgoraj-spodaj. S tem smo tudi (še enkrat) odgovorili negativno na vprašanje, ali je $\mathcal{LP}$ res sposobna vselej prikazati zvesto sliko videnega; včasih to nalogo bolje opravi krivočrtna $\mathcal{P}$.

Linearna perspektiva in dinamična geometrija

Pri učenju linearne perspektive si lahko pomagamo s sodobnimi računalniškimi orodji dinamične geometrije (na primer GeoGebra, Cinderella itd.), ki so danes že prosto dostopna na spletu. Po drugi strani pa na ta način tem orodjem damo neko konkretno smiselno uporabo. Perspektivo lahko uporabimo kot dovolj privlačno temo, da se bodo učenci in dijaki raje naučili uporabljati ta orodja. Najprej jim povemo tole:

Točke $A, B, C, \dots$ v dinamičnih konstrukcijah so proste, pol-vezane (na neko premico p), kar označimo na primer takole: $A \in p$, ali pa leže v preseku

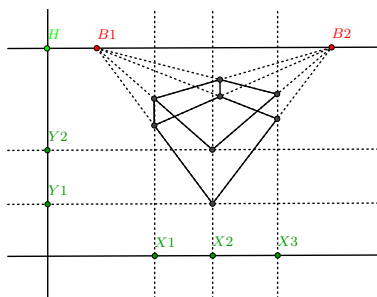


Slika 11. Krivočrtna $\mathcal{P}$ s tremi pari bežišč.

dveh premic p in q , kar označimo na primer takole: $A = p \wedge q$. Premice $p, q, r \dots$ v dinamičnih konstrukcijah so prav tako lahko proste, polvezane (gredo skozi neko točko A , kar zapišemo kot: $A \in p$, ali pa so povsem določene z že konstruiranimi točkami in premicami): če je p določena z dvema točkama A in B , to zapišemo takole: $p = A \vee B$, če je p pravokotnica na premico q in gre skozi točko A , to pišemo kot: $p \perp q, A \in p$; če je p vzporednica k premici q in gre skozi točko A , pišemo: $p \parallel q; A \in p$.

Zdaj jim lahko v razredu damo naloge na primer naslednjega tipa:

Naloga 1. Na navpični osi y pravokotnega koordinatnega sistema izberi delno vezano točko H , skozi jo postavi vzporednico h (horizont) k osi x . Na njej izberi dve delno prosti točki – bežišči B_1 in B_2 . Izberi še tri delno vezane točke X_1, X_2, X_3 na osi x in dve delno vezani točki Y_1, Y_2 na osi y (Slika 12). Zdaj lahko določiš položaje vseh ostalih točk kocke. Opazuj, kako se slika spreminja, če spreminjaš položaj točke H in s tem višino horizonta, ali medsebojno razdaljo bežišč B_1 in B_2 na horizontu, ali položaje zelenih točk na oseh.



Slika 12: Spreminjanje položaja pol-vezanih točk na oseh ali bežišč na horizontu spreminja obliko kocke, ki pa ves čas ostaja narisana v dvobežiščni $\mathcal{P}$.

Bralci bodo po zgornjem zgledu zagotovo zlahka sami razvili še druge primere uporabe dinamične geometrije pri učenju $\mathcal{LP}$, ki se z malo znanja GeoGebre lahko močno približajo prepričljivim in uporabnim dinamičnim perspektivnim prikazom hiš, trgov, ulic, kvadratnih tlakovanj, stopnic ter drugih objektov in prizorov.

LITERATURA

- [1] Joseph D'Amelio: *Perspective Drawing Handbook*, Unabridged Dover republication (2004) of the edition published by Tudor publ. comp., New York, [1964].
- [2] Kirsti Andersen: *The Geometry of an Art: The History of the Mathematical Theory of Perspective from Alberti to Monge*. Springer, 2007. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-48946-9>
- [3] Santiago Arcas, José Fernando Arcas, Isabel Gonzáles: *Mastering Perspective for Beginners*, Könemann Verlagsgesellschaft mbH, 2001.
- [4] André Barre and Albert Flocon, *La Perspective curviligne*, Flammarion, Éditeur Paris, 1968.
- [5] Bruno Ernst, *Optical Illusions*, Taschen Verlag GmbH, 1989.
- [6] The Optics of Euclid, translated by Harry Edwin Burton, *Journal of the Optical Society of America*, Vol. 35, No. 5, May 1945.
- [7] Koenderink, J. J., Fundamentals of Bicentric Perspective, Proceedings of the International Conference on Research in Computer Science and Control, 1992.
- [8] Branko Grünbaum, *Configurations of Points and Lines*, American Mathematical Soc., 2009.
- [9] Erwin Panofsky, *Perspective as Symbolic Form*, Urzone, Inc, 1991(po predavanjih iz let [1924 – 25]).
- [10] Tomaž Pisanski, Brigitte Servatius, *Configurations from a Graphical Viewpoint*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, 2013.
- [11] Uršula Berlot Pompe, *Linearna perspektiva v teoriji in praksi*, ALU UL, Ljubljana 2023. (e-knjiga)
- [12] Henk Rotgans, *Risanje prostora* Ljubljana, Pegaz International, 1993.

NOBELOVA NAGRADA ZA FIZIKO 2025
JOHN CLARKE, MICHEL DEVORET, JOHN MARTINIS
ZA ODKRITJE MAKROSKOPSKEGA KVANTNEGA
TUNELIRANJA IN KVANTIZACIJE NIVOJEV V
ELEKTRONSKEM VEZJU

ROK ŽITKO¹

¹Institut »Jožef Stefan«

Ključne besede: makroskopsko kvantno tuneliranje, Josephsonovi spoji, superprevodna kvantna elektronika

Nobelova nagrada za fiziko je bila leta 2025 podeljena J. Clarku, M. Devoretu in J. Martinisu za prvi zares prepričljiv eksperimentalni dokaz, da se makroskopske spremenljivke lahko obnašajo kvantno. Ključni del eksperimentalne postavitve je bila superprevodna naprava z Josephsonovim spojem. S tem eksperimentom so postavili temelje superprevodne kvantne elektronike za temeljne raziskave in aplikacije, med drugim za ustvarjanje makroskopskih koherentnih stanj (Schrödingerjeva mačka) in za kvantne računalnike.

NOBEL PRIZE IN PHYSICS 2025
JOHN CLARKE, MICHEL DEVORET, JOHN MARTINIS
FOR THE DISCOVERY OF MACROSCOPIC QUANTUM MECHANICAL
TUNNELING AND ENERGY QUANTISATION IN AN ELECTRIC CIRCUIT

The Nobel Prize in Physics in 2025 was awarded to J. Clarke, M. Devoret, and J. Martinis for providing the first truly convincing experimental evidence that macroscopic variables can exhibit quantum behavior. A key component of the experimental setup was a superconducting device with a Josephson junction. This experiment laid the foundations of superconducting quantum electronics for fundamental research and applications, including the creation of macroscopic coherent states (Schrödinger's cat) and quantum computers.

1. Meja med klasičnim in kvantnim svetom

V vsakdanjem življenju se nam zdi opis v okviru klasične fizike povsem zadosten, kvantno mehaniko pa obravnavamo kot orodje, ki je zares potrebno zgolj za opis pojavov na mikroskopski velikostni skali. Zavedamo se sicer, da številnih pojavov ne moremo pojasniti v okviru klasične fizike, vendar se te podrobnosti običajno skrivajo v specifičnih snovnih konstantah v konstitutivnih zvezah, medtem ko imajo dinamične enačbe za opis pojavov na makroskopski skali obliko, ki je značilna za klasično fiziko. Kvantna mehanika se dejansko manifestira na makroskopski skali skozi pojave, kot so superfluidnost in superprevodnost, vendar lahko tudi v teh primerih uporabimo

fenomenološki opis, ki je klasičen. Primer je Landau-Ginzburgova teorija superprevodnosti, v kateri kot spremenljivka nastopa parameter reda Ψ , ki ima kompleksno vrednost in ki ga pogosto imenujemo tudi »makroskopska valovna funkcija«, vseeno pa imajo enačbe obliko klasične teorije polja, v kateri časovna odvisnost opisuje vračanje v termodinamsko ravnovesje z difuzijo in ne more opisati kvantne dinamike. Gre za kolektivne pojave, pri katerih imamo veliko število mikroskopsko koherentnih gradnikov, kar lahko (zelo shematsko) opišemo kot valovno funkcijo tipa

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \propto [\Psi_L(x_1) + \Psi_D(x_1)] [\Psi_L(x_2) + \Psi_D(x_2)] \cdots [\Psi_L(x_N) + \Psi_D(x_N)], \quad (1)$$

torej kot produktno stanje velikega števila lokalnih superpozicij stanj Ψ_L in Ψ_D (»levo« in »desno« stanje).

Še pomembnejše vprašanje pa je, ali obstajajo primeri, ko lahko makroskopsko velik sistem opišemo z eno samo spremenljivko in se ta spremenljivka obnaša kvantno. Opravka imamo torej s situacijo, ki je analogna metafori Schrödingerjeve mačke in ki jo lahko shematsko opišemo z valovno funkcijo tipa

$$\Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \propto \Psi_L(x_1)\Psi_L(x_2) \cdots \Psi_L(x_N) + \Psi_D(x_1)\Psi_D(x_2) \cdots \Psi_D(x_N), \quad (2)$$

torej kvantno prepleteno superpozicijo makroskopsko ločljivih stanj. Takšna stanja pogosto imenujemo kar mačja stanja.

S tem vprašanjem se je konec 70. in v zgodnjih 80. letih intenzivno ukvarjal Anthony Leggett (kasnejši dobitnik Nobelove nagrade za razlago superfluidnosti v tekočem heliju ^3He). Fizikalna skupnost je bila tedaj dokaj zadržana. Po eni strani se jim je zdelo ukvarjanje z makroskopskimi manifestacijami kvantne mehanike nepotrebno, saj naj bi bil že obstoj superprevodnosti, laserjev in podobnih sistemov zadosten dokaz. Po drugi strani pa se jim je zdelo ukvarjanje s Schrödingerjevimi mačkami brezupno, ker je v makroskopsko velikih telesih razmik med sosednjimi kvantnimi nivoji tako majhen, da bi že premik enega samega elektrona daleč proč od telesa zaradi Coulombove interakcije predstavljal velikanski vpliv in tako povzročil dekoherenco. Leggett je na prvi očitek odgovarjal, da gre za neprimerljiva primera, na drugega pa, da je to zmotno prepričanje, ker je vpliv oddaljenega elektrona na sosednje nivoje lahko enak, in da se je tega problema treba lotiti bolj resno. Z oddaljenim elektronom se namreč sklaplja le nekaj kolektivnih operatorjev, recimo operator za celotni naboj, magnetni pretok ipd.

2. Makroskopsko kvantno tuneliranje

Velika ovira za opazovanje kvantnih pojavov pa je lahko interna disipacija v makroskopskem sistemu in prav tej temi je Leggett posvetil veliko pozornosti. S sodelavcem Caldeiro sta iznašla fenomenološki model za kvantne disipativne sisteme ter pokazala, kako disipacija vpliva na razpadni čas za pobeg sistema iz metastabilnega minimuma potencialne energije. Dekoherenca je mogoče povezati z disipacijo (»trenjem«, »upornostjo«), ki je merljiva v klasičnem režimu delovanja naprave.

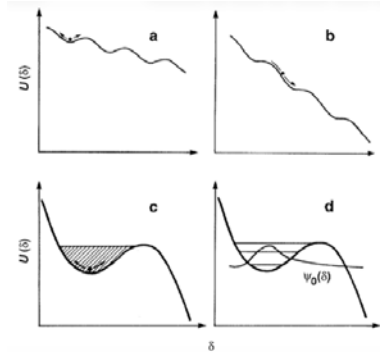
Leggett je predlagal, da bi lahko tovrstne makroskopske kvantne pojave opazovali v superprevodnih napravah z Josephsonovim spojem [5]. Skozi Josephsonov spoj teče električni tok, če se faza parametrov reda na obeh superprevodnih kontaktih razlikuje, kar opisuje prva Josephsonova zveza

$$I(t) = I_c \sin \phi(t). \quad (3)$$

I_c se imenuje kritični tok in je specifična lastnost danega spoja. Fazna razlika ϕ je makroskopska spremenljivka, saj opisuje kolektivno stanje ogromnega števila elektronov, ki združeni v Cooperjeve pare tvorijo superprevodni kondenzat. Skozi Josephsonov spoj lahko teče superprevodni tok (supertok) brez potencialnega padca, če je tok manjši od kritičnega. Potencialna energija spoja je periodična funkcija spremenljivke ϕ , zunanji tok pa prispeva dodatni linearni člen. Vsota obeh prispevkov ima obliko nagnjenega periodičnega potenciala (slika 1). V tem potencialu se giblje ϕ kot nekakšna kroglica. Če je tok manjši od kritičnega, ima potencial lokalne minimume, ki ustrezajo supertoku brez napetosti (slika 1a). Če pa je tok večji od kritičnega, je naklon potenciala tako velik, da lokalnih minimumov več ni, kroglica se kotali, kar ustreza končni napetosti (slika 1b). To opisuje druga Josephsonova zveza

$$U(t) = \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}. \quad (4)$$

U je napetost na spoju, $\Phi_0 = h/2e$ pa kvant magnetnega pretoka. Če je tok malenkost manjši od kritičnega, se zastavi vprašanje, kako dolgo bo »kroglica« ostala v minimumu, saj lahko iz pasti pobegne zaradi termičnih fluktuacij, ki ji dajo dovolj energije za pobeg iz plitvine. Z nižanjem temperature verjetnost za ta proces postane eksponentno majhna. Če pa je disipacija v sistemu dovolj nizka, lahko kroglica iz minimuma pobegne tudi s kvantnim tuneliranjem *skozi* energijsko pregrado. Letošnji Nobelovi nagradenci so to napoved eksperimentalno preverili. Pojav je znan kot makroskopsko kvantno tuneliranje (angl. macroscopic quantum tunneling, MQT).



Slika 1. Nagnjeni periodični potencial Josephsonovega spoja v prisotnosti končnega električnega toka. a) Primer, ko je tok nižji od kritičnega: makroskopska spremenljivka je ujeta v potencialni minimum, tok teče brez upora, na spoju ni napetosti. b) Primer, ko je tok višji od kritičnega: makroskopska spremenljivka se s časom spreminja, na spoju se pojavi končna napetost. c) Klasična spremenljivka lahko zavzame poljubno energijo. d) V kvantnem režimu so nivoji kvantizirani, sistem pa lahko iz energijske pregrade pobegne s tuneliranjem. vir: ©The Royal Swedish Academy of Sciences

3. Superprevodna elektronska vezja

Superprevodniki lahko prevajajo električni tok brez upornosti, zato jih lahko v prvem približku opišemo z analogijo s konservativnim mehanskim sistemom. Vezje razdelimo na elemente, ki povezujejo vozlišča (stičišča med elementi). Vsakemu elementu lahko pripišemo napetost in tok, ki sta dobro definirana z integraloma po električnem in magnetnem polju:

$$v_b(t) = \int_{\text{začetek veje } b}^{\text{konec veje } b} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}, \quad (5)$$

$$i_b(t) = \frac{1}{\mu_0} \oint_{\text{okoli veje } b} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r}. \quad (6)$$

$$(7)$$

Z indeksom b oštevilčimo različne veje vezja. Integracijske poti potekajo zunaj materiala. Izkaže se, da je lažje kot s tokovi računati z integriranimi količinami po času (posplošenimi naboji), zato vpeljemo pretok in naboj

$$\phi_b(t) = \int_{-\infty}^t v_b(t') dt', \quad (8)$$

$$q_b(t) = \int_{-\infty}^t i_b(t') dt'. \quad (9)$$

Za kondenzator, ki ga v ravninski superprevodni napravi izdelamo kot med seboj prepletene elektrode v obliki prstov (angl. interdigitated capacitor), je naboj q dejansko razlika nabojev med kontaktoma. Za običajno tuljavo bi bil pretok ϕ dejansko magnetni pretok skozi ovoje žice, v superprevodnem

induktorju, ki ga v ravnini izdelamo kot vijugasto žico (angl. meandering inductor), pa je polje sicer bolj zapleteno, vendar gre za podobno idejo. Za elemente obeh tipov potem izračunamo pripadajočo energijo kot integral po času

$$\mathcal{E}_b(t) = \int_{-\infty}^t v_b(t') i_b(t') dt'. \quad (10)$$

Sistem opišemo v Lagrangevem formalizmu, zato vse količine izrazimo s pretoki. Kondenzatorji dajo sistemu inercijo, torej kapaciteta C igra vlogo mase, induktorji pa so analogni vzmetem s konstantno vzmeti $k \propto 1/L$. Energiji se zapišeta

$$E_{\text{kin}} = \frac{C\dot{\phi}^2}{2}, \quad (11)$$

$$E_{\text{pot}} = \frac{\phi^2}{2L}. \quad (12)$$

Naslednji korak je določitev nabora med seboj neodvisnih prostostnih stopenj, pri čemer si pomagamo s Kirchhoffovima izrekoma o tokovnem vozlišču in tokovni zanki, ki opredeljujeta vezi in s tem redundantne spremenljivke. Sistematičen način se imenuje metoda vpetega drevesa (angl. spanning tree): vezje si predstavljamo kot usmerjen graf (usmerjenost je potrebna, da dobimo pravilne predznake) in izberemo drevo brez zank iz samih kondenzatorjev, z začetno točko denimo pri masi. Po kratkem premisleku ugotovimo, da lahko stanje vezja popolnoma opredelimo, če podamo vrednosti vozliščnih pretokov ϕ_n v vseh vozliščih vpetega drevesa, pri čemer so pretoki skozi elemente definirani kot razlike vozliščnih pretokov ob upoštevanju usmerjenosti grafa [21]. Možnih izbir drevesa je lahko v velikih vezjih več; v bistvu gre za izbiro umeritve (angl. gauge choice). Ko zapišemo Lagrangevo funkcijo $L = E_{\text{kin}}(\dot{\phi}, \phi) - E_{\text{pot}}(\phi)$ z vozliščnimi pretoki, lahko določimo še konjugirane posplošene momente z odvajanjem L po $\dot{\phi}_n$, kar uvedemo kot vozliščne naboje q_n . S temi spremenljivkami nato iz Lagrangeve funkcije določimo pripadajočo Hamiltonovo, $H(q, \phi) = E_{\text{kin}}(q, \phi) + E_{\text{pot}}(\phi)$. Tedaj je vse pripravljeno za kanonično kvantizacijo. Naboje q_n in ϕ_n proglasimo za operatorje s komutacijsko zvezo $[\hat{\phi}_m, \hat{q}_n] = i\hbar\delta_{mn}$. Stanje vezja potem povsem opišemo z valovno funkcijo $\Phi(\phi)$, pri čemer so seveda možna stanja tudi superpozicije, kjer makroskopsko veliki električni tokovi tečejo »hkrati« v nasprotnih smereh po različnih vejah vezja.

Najbolj preprosto vezje je nihajni krog iz kondenzatorja in tuljave. Ključni količini sta lastna frekvenca $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ in impedanca $Z_0 = \sqrt{L/C}$. Tipične frekvence superprevodnih resonatorjev so v mikrovalovnem območju (nekaj GHz), impedanco pa običajno izberemo okoli $50 \, \Omega$ za učinkovito sklapljanje z valovodi in koaksialnimi kabli. Ker operatorja pretoka in naboja ne komutirata, pretok in naboj fluktuirata tudi v osnovnem stanju,

in sicer velja $\phi_{\text{ZPF}} = \sqrt{\hbar Z_0/2}$ in $q_{\text{ZPF}} = \sqrt{\hbar/2Z_0}$ (okrajšava ZPF iz angl. zero-point fluctuations). Za občutek, vrednosti teh količin za tipične superprevodne mikrovalovne resonatorje v kvantnih vezjih so velikostnega reda nekaj stotink kvanta pretoka Φ_0 in 10 osnovnih nabojev.

Opis disipacije v kvantnih sistemih je bolj zapleten. Izgube so odvisne od frekvence, kar opišemo z realnim delom frekvenčno odvisne impedance $Z(\omega)$. Caldeira in Leggett sta pokazala, da lahko poljubno impedanco $Z(\omega)$ predstavimo kot neskončno množico harmonskih oscilatorjev, ki predstavljajo notranja stanja okolice in ki se s sistemom sklapljajo linearno [1, 17]. Izkaže se, da so najpomembnejši načini iz okolice tisti pri lastni frekvenci sistema. Kvantni pojavi v Josephsonovih vezjih bodo torej opazni, če nam uspe zmanjšati izgube v mikrovalovnem področju.

4. Razpadni čas

Efektivni potencial Josephsonovega spoja v prisotnosti toka je

$$U(\phi) = -\frac{I_c \Phi_0}{2\pi} \left(\cos \phi + \frac{I}{I_c} \phi \right). \quad (13)$$

Frekvenca nihanja na dnu potencialne jame se imenuje plazemska frekvenca (saj gre dejansko za nihanje električno nabitega kondenzata glede na statično pozitivno nabito ozadje) in se zapiše

$$\omega_p = \sqrt{\frac{2\pi I_c}{\Phi_0 C}} \left[1 - \left(\frac{I}{I_c} \right)^2 \right]^{1/4}. \quad (14)$$

Višina pregrade pa je

$$\Delta U = \frac{2\sqrt{2}I_c \Phi_0}{3\pi} \left(1 - \frac{I}{I_c} \right)^{3/2}. \quad (15)$$

Tako tok I kot kritični tok I_c lahko spreminjamo: I neposredno na tokovnem izvoru, I_c pa z zunanjim magnetnim poljem, ki oslabi superprevodnost in s tem zniža velikost kritičnega toka. Če je I malenkost manjši od I_c , lahko potencial dobro opišemo z vsoto kvadratnega in kubičnega člena:

$$U(\phi) \approx A\phi^2 - B\phi^3. \quad (16)$$

Teoretični problem, ki ga tu rešujemo, je torej pobeg iz metastabilnega minimuma tega potenciala. V klasičnem režimu, $k_B T \gg \hbar \omega_p$, je ta problem rešil Kramers leta 1940 [16]. Za pogostost pobega velja izraz

$$\Gamma_t(T) = a_t \frac{\omega_p}{2\pi} \exp \left(-\frac{\Delta U}{k_B T} \right), \quad (17)$$

kjer je $a_t = 4/\left(\sqrt{1 + \frac{Qk_BT}{1.8\Delta U}} + 1\right)^2$ konstanta reda 1. $Q = \omega_p RC$ je faktor kakovosti nihajnega kroga, kjer je R vzporedna upornost vezja.

V kvantnem režimu, $k_BT \ll \hbar\omega_p$, sta nalogo prva rešila Ivanchenko in Zilberman leta 1968 za primer brez disipacije [2], polni problem pa pozneje Caldeira in Leggett [1, 17]. Za razpadno frekvenco sta dobila

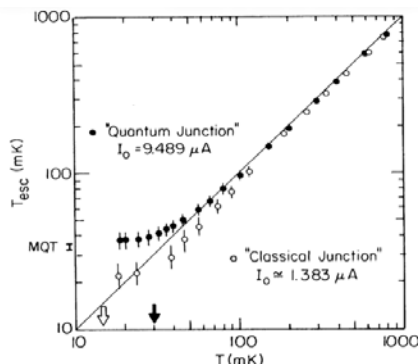
$$\Gamma_q(0) = a_q \frac{\omega_p}{2\pi} \exp\left[-7.2 \frac{\Delta U}{\hbar\omega_p} \left(1 + \frac{0.87}{Q}\right)\right] \quad (18)$$

kjer je $a_q = \left[120\pi \frac{7.2\Delta U}{\hbar\omega_p}\right]^{1/2}$, izraz pa velja za temperaturo nič. Pomembna ugotovitev je, da disipacija eksponentno zmanjša pogostost pobegov s tuneliranjem, za razliko od termičnih pobegov, kjer Q ne nastopa v eksponentu in zgolj šibko vpliva na predfaktor v izrazu. Pozneje je bil problem rešen tudi za končne temperature, kar daje pravilen opis zveznega prehoda med kvantno limito in klasičnim režimom [18, 20, 3].

5. Eksperimentalna potrditev

Prvi poskusi eksperimentalne potrditve obstoja makroskopskega kvantnega tuneliranja (MQT) so bili opravljeni v več skupinah že v začetku 80. let [4]. Dejansko so opazili, da z nižanjem temperature pogostost preklopa v stanje s končno napetostjo ne pada proti nič, temveč kaže znake zasičenja pri neki končni vrednosti. Težava teh prvih eksperimentov je bila, da niso bili prepričljivi, saj bi do zasičenja lahko prišlo tudi zaradi zunanjih motenj iz okolice, recimo zaradi elektromagnetnega šuma, ki bi pri nizkih temperaturah lahko prevladal nad notranjimi termičnimi fluktuacijami. To predstavlja dvojni eksperimentalni izziv: po eni strani je treba poskrbeti za izjemno dobro preprečevanje vdora neželenih elektromagnetnih motenj do merjenja. Po drugi strani pa je potrebno dobro poznati vse parametre sistema, da je mogoče zanesljivo kvantitativno napovedati, kako se bo manifestiralo kvantno tuneliranje. Pri slednjem je pomembno, da se karakterizacija merjenja opravi v klasičnem režimu, v katerem so vsi parametri povsem jasno definirani.

Nagrajencem je uspelo oboje. Iznašli so rešitev za izjemno učinkovito odpravljanje mikrovalovnih шумov z uporabo filtrov s prahom iz drobnih bakrenih zrn v dielektričnem mediju. (V resnici je šlo za ponoven izum, saj je to rešitev že pred tem uporabljala vojska kot zaščito pred jedrskimi orožji za ustvarjanje elektromagnetnih pulzov, vendar je v 80. letih to bila še tajnost.) Prav tako so napravi dodali možnost nadzorovanega obsevanja z mikrovalovnim valovanjem, kar jim je omogočilo in situ karakterizacijo.



Slika 2. Ubežna temperatura T_{esc} v odvisnosti od temperature naprave T . Temni in svetli simboli so izmerjene vrednosti za dve nastavitvi, ki se razlikujeta po temperaturi prehoda iz klasičnega v kvantni režim (temperaturi sta označeni s puščicama na horizontalni osi). Oznaka MQT na vertikalni osi predstavlja pričakovano vrednost pri temperaturi nič.

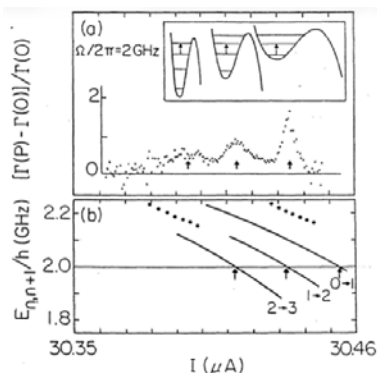
Določili so lahko lastno frekvenco vezja in dovolj dobro ocenili faktor kakovosti Q pri visokih temperaturah [6], kjer je klasični opis povsem ustrezen, zato so *točno* vedeli, kako se mora sistem obnašati pri nizkih temperaturah, če pojav MQT zares obstaja. V okviru merskih napak je bil rezultat dokončen: makroskopsko veliko Josephsonovo vezje, opisano s spremenljivko ϕ , pri nizkih temperaturah iz potencialne jame pobegne s kvantnim tuneliranjem [8].

Za lažjo ponazoritev so pogostost pobega izrazili z ekvivalentno »ubežno temperaturo« (angl. escape temperature) T_{esc} , definirano preko zveze

$$\Gamma = \frac{\omega_p}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta U}{k_B T_{\text{esc}}}\right). \quad (19)$$

Pri visokih temperaturah je T_{esc} sorazmerna s temperaturo, pri nizkih temperaturah pa se padanje ustavi in T_{esc} se ustali pri končni vrednosti, glej sliko 2. Kvantitativno pravilno je bil opisan tudi vpliv disipacije, kar je potrdilo adekvatnost fenomenološkega pristopa, ki sta ga vpeljala Caldeira in Leggett.

Poleg MQT je trojica zaznala še en značilen kvantni pojav, in sicer kvantizacijo nivojev [7]. Z ustrezno nastavitvijo parametrov so dosegli, da je bila potencialna jama ravno zadosti globoka, da je bilo v njej poleg osnovnega stanja še nekaj nivojev (trije ali štirje). Nato so napravo vzbujali z mikrovalovnim valovanjem. Če je frekvenca, pomnožena s Planckovo konstanto, ustrezala energijski razliki dveh nivojev, je verjetnost za pobeg iz jame narastla, saj je višina pregrade za vzbujena stanja efektivno nižja, kar so eksperimentalno jasno zaznali. Pri končni temperaturi so termično zase-



Slika 3. Ojačitve verjetnosti za pobeg v odvisnosti od frekvence obsevanja Josephsonovega spoja z mikrovalovnim valovanjem. Ojačitve ustrezajo energijam prehodov med sosednjimi nivoji v potencialni jami (na spodnji sliki so izračunane vrednosti).

dena tudi vzbujena stanja, zato so lahko prehode vzbujali za poljubne pare nivojev. Najbolj razvidni prehodi so bili med stanji 0 in 1, 1 in 2, 2 in 3, pri čemer so se energijske razlike zelo dobro ujemale z napovedmi za lastna stanja kubičnega potenciala, glej sliko 3.

6. Kasnejši razvoj

Ti pionirski eksperimenti so pokazali, da lahko na nadzorovan način izdelamo elektronska vezja z izbrano funkcionalnostjo in proučujemo njihovo obnašanje v kvantnem režimu. Naslednji očitni korak je bila demonstracija makroskopske kvantne koherence (angl. macroscopic quantum coherence, MQC), torej koherentne superpozicije dveh makroskopskih stanj, kar je analogija živo-mrtvi Schrödingerjevi mački. Prikaz MQC je bistveno težji kot prikaz MQT, ker mora biti sistem koherenten daljši čas (ne zgolj ob tuneliranju skozi pregrado), zato je bilo potrebno še več kot desetletje dodatnega razvoja eksperimentalnih tehnik. Dodatno vzpodbudo področju je dal Shorov izum kvantnega algoritma za faktorizacijo celih števil na prafaktorje [9], ki omogoča eksponentno pohitritev glede na znane klasične algoritme, kar ima kritične implikacije za kriptografijo. Prve zanesljivo delujoče kvantne bite (kubite) iz superprevodnih vezij je uspelo izdelati ob prelomu stoletja, denimo nabojske kubite (angl. Cooper-pair box) v skupini Y. Nakamure v podjetju NEC [10], s katerimi so demonstrirali Rabijeve oscilacije in Ramseyeve interferenčne franže v dvonivojskem sistemu. Stanji $|0\rangle$ in $|1\rangle$ sta ustrezali stanjema, ki sta se razlikovala za en dodatni Cooperjev par na superprevodnem otočku. Malo za tem so se pojavili še kubiti na pretok (angl. flux qubit), kjer stanja ustrezajo različno usmerjenim trajnim tokovom v

superprevodnem obročku, skozi katerega je vzpostavljen magnetni pretok $\Phi_0/2$, ter fazni kubiti, ki so pravzaprav podobni postavitvi eksperimenta iz leta 1985 z Josephsonovim spojem pri končnem toku [11].

Pomemben preboj je bila iznajdba »kvantne elektrodinamike v vezju« (angl. circuit quantum electrodynamics, cQED), ki je superprevodni ekvivalent kvantne elektrodinamike v optičnih votlinah (angl. cavity QED), v katerih igrajo vlogo (Rydbergovih) atomov Josephsonovi spoji (kubiti), vloga votlin pa mikrovalovni resonatorji [13, 14]. V superprevodnih napravah lahko dosežemo tudi režim »ultramočne« sklopitve, ki v optičnih votlinah ni dosegljiv [12].

Velik tehnični dosežek je tudi nedavna demonstracija kršitve Bellove neenačbe v sistemu dveh superprevodnih kubitov, ki sta bila povezana s 30 metrov dolgim valovodom, ki je bil v celoti ohlajen do temperatur v področju mK. Uspelo jim je odpraviti vse vrzeli (angl. loophole-free Bell test) in zanesljivo potrditi nevzdržnost predpostavke lokalnega realizma tudi v sistemu z makroskopskimi kvantnimi stanji [15].

7. Zaključek

Letošnji Nobelovi nagrajenci za fiziko so bili nagrajeni za prvo prepričljivo demonstracijo kvantnega obnašanja ene makroskopske spremenljivke. To jim je uspelo s popolno karakterizacijo vezja *in situ*, tako da so natančno poznali vse parametre v modelskem opisu in so lahko nedvoumno napovedali pričakovane rezultate v nizkotemperaturnem kvantnem območju. Te so dejansko tudi izmerili v okviru ocenjenih merskih napak. Opravili so več eksperimentov na Josephsonovih vezjih, pri čemer je komisija izpostavila dva: demonstracijo makroskopskega kvantnega tuneliranja in kvantizacijo nivojev v potencialni pregradi. S tem so odprli novo področje raziskav, ki se je nadaljevalo s številnimi drugimi prikazi osnovnih kvantnih pojavov na makroskopski skali, kot sta superpozicija stanj makroskopskega sistema ter kvantna prepletenost dveh oddaljenih makroskopskih sistemov. Superprevodna vezja so danes tudi pomembna platforma za izdelavo kvantnih računalnikov, mikrovalovnih ojačevalcev, ki imajo najnižji možni šum, ki ga še dopušča Heisenbergovo načelo nedoločenosti (angl. quantum limited amplifier), ter detektorjev za posamične optične in mikrovalovne fotone.

LITERATURA

- [1] A. O. Caldeira in A. J. Leggett: Influence of Dissipation on Quantum Tunneling in Macroscopic Systems, *Physical Review Letters* **46** (1981), 211–214.
- [2] Yu. M. Ivanchenko in L. A. Zil'berman: The Josephson Effect in Small Tunnel Contacts, *Soviet Physics JETP* **28** (1969), 1272–1276. (Original: Zh. Eksp. Teor. Fiz. **55** (1968), 2395–2402.)

- [3] J. Clarke, A. N. Cleland, M. H. Devoret, D. Esteve in J. M. Martinis: Quantum Mechanics of a Macroscopic Variable: The Phase Difference of a Josephson Junction, *Science* **239** (1988), 992–997.
- [4] R. F. Voss in R. A. Webb: Macroscopic Quantum Tunneling in 1- μm Nb Josephson Junctions, *Physical Review Letters* **47** (1981), 265.
- [5] A. J. Leggett: Schrödinger’s Cat and Her Laboratory Cousins, *Contemporary Physics* **25** (1984), 583–598.
- [6] M. H. Devoret, J. M. Martinis, D. Esteve in J. Clarke: Resonant Activation from the Zero-Voltage State of a Current-Biased Josephson Junction, *Physical Review Letters* **53** (1984), 1260.
- [7] J. M. Martinis, M. H. Devoret in J. Clarke: Energy-Level Quantization in the Zero-Voltage State of a Current-Biased Josephson Junction, *Physical Review Letters* **55** (1985), 1543–1546.
- [8] M. H. Devoret, J. M. Martinis in J. Clarke: Measurements of Macroscopic Quantum Tunneling out of the Zero-Voltage State of a Current-Biased Josephson Junction, *Physical Review Letters* **55** (1985), 1908–1911.
- [9] P. W. Shor: Algorithms for Quantum Computation: Discrete Logarithms and Factoring, v: *Proc. 35th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, IEEE Computer Society, Los Alamitos, CA, 1994, 124–134.
- [10] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin in J. S. Tsai: Coherent Control of Macroscopic Quantum States in a Single-Cooper-Pair Box, *Nature* **398** (1999), 786–788.
- [11] J. M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado in C. Urbina: Rabi Oscillations in a Large Josephson-Junction Qubit, *Physical Review Letters* **89** (2002), 117901.
- [12] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin in R. J. Schoelkopf: Strong Coupling of a Single Photon to a Superconducting Qubit Using Circuit Quantum Electrodynamics, *Nature* **431** (2004), 162–167.
- [13] A. Blais, R.-S. Huang, A. Wallraff, S. M. Girvin in R. J. Schoelkopf: Cavity Quantum Electrodynamics for Superconducting Electrical Circuits: An Architecture for Quantum Computation, *Physical Review A* **69** (2004), 062320.
- [14] A. A. Clerk, K. W. Lehnert, P. Bertet, J. R. Petta in Y. Nakamura: Hybrid Quantum Systems with Circuit Quantum Electrodynamics, *Nature Physics* **16** (2020), 257–267.
- [15] S. Storz, J. Schär in drugi: Loophole-Free Bell Inequality Violation with Superconducting Circuits, *Nature* **617** (2023), 265–270.
- [16] H. A. Kramers: Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions, *Physica* **7** (1940), 284–304.
- [17] A. O. Caldeira in A. J. Leggett: Quantum tunnelling in a dissipative system, *Annals of Physics* **149** (1983), 374–456.
- [18] H. Grabert in U. Weiss: Quantum Tunneling in Dissipative Systems at Finite Temperatures, *Physical Review Letters* **52** (1984), 2193–2196.
- [19] H. Grabert, P. Olschowski in U. Weiss: Temperature Dependence of Quantum Decay Rates in Dissipative Systems, *Physical Review B* **32** (1985), 3348–3350.
- [20] H. Grabert, P. Olschowski in U. Weiss: Quantum Decay Rates for Dissipative Systems at Finite Temperatures, *Physical Review B* **36** (1987), 1931–1951.
- [21] M. H. Devoret: Quantum Fluctuations in Electrical Circuits, v: *Quantum Fluctuations: Lecture Notes of the Les Houches Summer School*, Elsevier, Amsterdam, 1997, 351–386.

Tomaž Zwitter: Zvezde, osončja in njihovo opazovanje (Založba UL FMF, 2025)

Bliža se prva obletnica izdaje knjige prof. dr. Tomaža Zwittra z naslovom »Zvezde, osončja in njihovo opazovanje«. Tiste, ki knjige še niste prijeli v roke, toplo vabim na prijetno zimsko branje! Matematiki in fiziki smo tako mahnjeni na tujo literaturo, da nam biseri izpod domačih gora marsikdaj uidejo; naj se to ne zgodi tudi s Zwitterovo knjigo! Gre za pester in modern pregled osnov astronomije – od zgodovinskih začetkov, preko optičnih pripomočkov za opazovanje neba in nebesne orientacije, do razprave osnovnih lastnosti Sonca, Osončja, zvezd ter planetnih sistemov izven Osončja. Človek bi na prvo žogo seveda pomislil, da je tovrstnih knjig mnogo in da utegne kakšna tuja, že uveljavljena knjiga služiti kot boljša referenca, toda s tovrstnim refleksom se nikakor ne bi strinjal. Če poznate Tomaža Zwittra bodisi kot sodelavca bodisi kot profesorja (ali celo mentorja) bodisi kot prijazen obraz s TV zaslonov, se boste z brskanjem po knjigi počutili, kot bi stal pred vami! Snov je v Zwitterovem značilnem slogu podana jasno, pestro ter z zdravim odmerkom hudomušnosti! Naj vam navedem primer direktno iz knjige: “Med projekti, ki so vzbudili močno nasprotovanje, med drugim s protestno izjavo Mednarodne astronomske zveze in z vrsto nastopov na letnem evropskem astronomskem kongresu leta 2019 v Lyonu, je Starlink firme SpaceX lastnika Elona Muska ... Nevarnosti takega obširnega prisvajanja vesolja so tri: prvič so ti relativno veliki sateliti vidni s prostimi očmi in predstavljajo motnjo pri opazovanju nočnega neba, danosti, ki je tisočletja predstavljala vir užitka in zvedavosti mnogih generacij. Drugič bodo ti povsod prisotni sateliti z močnimi radijskimi oddajniki komunicirali z uporabniki na Zemlji, to pa bo zelo verjetno pomenilo oviro za opazovanje vesolja z radijskimi teleskopi. Če se bodo ponovile slabe izkušnje s sateliti Iridium, torej v prihodnosti ne bo slik črnih lukenj in podobnih odmevnih dosežkov. Na koncu me resno skrbi, kaj bo s sateliti, ki se bodo pokvarili. Zagotavljajo sicer, da naj bi jih vsaj 90 % uničili s potopitvijo v Zemljino atmosfero, a vprašanje ostaja, kaj bo s tisoči neuničenih. Bomo poročali o dnevnih trkih satelitskega drobirja?”



Ali ni čudovito imeti domačo knjigo, ki si drzne lotiti znanosti na družbeno-političnem nivoju in ne zgolj na akademskem? Zwitter nas uči in tudi vzgaja: astronomija kot veda nas združuje, saj išče odgovore na vprašanja, ki si jih od pamtiveka zastavljamo; zato ni dovolj, da uživamo v dognanjih naših kolegov znotraj in zunaj meja naše države, moramo tudi prevzeti odgovornost ter se boriti za dostop do opazovalnega dela astronomije za bodoče generacije.

Knjiga je predvsem namenjena študentom dodiplomskega študija fizike in astronomije na FMF. Kot Zwitter pravi, je namen besedila "slalom skozi gozd poimenovanj in astronomskega žargona". Nekaj srednješolskega predznanja fizike in matematike je resda potrebno, ampak to je v veliki meri tudi zagotovljeno, še posebej med našimi študenti. Tudi naključni bralec zunaj znanstvene srenje se lahko marsičesa nauči, saj se Zwitter vidno trudi uporabljati jasen, dostopen in bralcu prijazen nagovor. Osebo si štejem v čast, da so me izbrali za recenzenta Zwittrovega dela, saj sem se tudi sam veliko naučil. Sem se pa tudi neznansko zabaval, saj se mi vsak prebran stavek zazdi, kot bi bil pobran direktno z ustnic zdaj že rahlo osivelega, prijaznega astronomskega skuštranca, ki ga pozna bržkone cela Slovenija.

Ko se astronomi pogovarjamo, je to redko kdaj slovenščina; bolj spakedranščina. Pogosto nas boste slišali diskutirati v stilu "si videl, da so včeraj objavili katalog Gajinih zvezd, kjer so jih našli cel kup med main-sequence turn-offom in RGB-jem, torej v Hertzsprung gapu?". Zavedam se, da smo fiziki in matematiki v splošnem dovzetni za tako mešanje strokovnih jezikov. To pa je še ena značilnost Zwittrove knjige: uporabljeno ter vpeljana izrazoslovje je domače, kvalitetno prevedeno in povsem primerno. Zwitter bi torej rekel: "... kjer so jih našli cel kup med kolenom glavne veje in dnomo veje orjakinj, torej v Hertzsprungovi vrzeli?" To je seveda neizogibno, če si poročen s slavistko, ki ti diha za vrat vsakič, ko se v govoru spotakneš na nepotrebno tujko. Zahvala torej gre tudi Savini Zwitter.

Vsekakor pa je knjiga izjemno bogata akademskih biserov, ki jih težko najdemo drugod. Na primer, pri obravnavi črnih lukenj nas Zwitter spomni, "da je zlivanje črnih lukenj med prvimi proučeval prof. dr. Andrej Čadež, ki je prvi tudi izračunal, kako se ob tem združita horizonta obeh črnih lukenj". Kaj takega težko zasledimo v tuji literaturi, kar bi – preprosto rečeno – bilo škoda.

Zato iskreno svetujem, da primete Zwittrovo knjigo v roke in pobrsunate po njej. Zimski dnevi so kratki, noči vam pa lahko knjiga še kako popestri, tudi če ste že totalni stručkoti za zvezde med main-sequence turn-offom in RGBjem.

Andrej Prša

Poročilo o 79. Občnem zboru DMFA Slovenije

Redni, že 79. občni zbor DMFA Slovenije, je potekal v četrtek, 6. marca 2025, na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani. Prisotne je najprej pozdravila predsednica društva Mojca Vilfan, tradicionalno čakanje na sklepčnost pa je obogatilo vabljenno predavanje Leva Vidmarja, prejemnika Zoisovega priznanja 2024 za odkritje novih vzorcev obnašanja večdelnih kvantnih sistemov.



Slika 1. Lev Vidmar med predavanjem *Kvantna fizika nekoč in danes: od enega do mnogo delcev*.

Po potrditvi dnevnega reda in delovnega predsedstva smo se z minuto molka poklonili članom društva, ki so nas zapustili v zadnjem obdobju, med njimi dr. Zvonku Trontlju, dr. Gabrijelu Kernelu, prof. dr. Rudolfu Podgorniku, Francetu Pernetu, Jelisavi Sakelšek, Tomažu Skulju in dr. Bogdanu Povhu.

Predsednica dr. Mojca Vilfan je nato podala pregled dela v zadnjem obdobju: uspešno organizacijo državnih tekmovanj (19 tekmovanj, več kot 100.000 udeležencev in ok. 7000 mentorjev), odlične dosežke mladih na mednarodnih olimpijadah (3 zlate, 6 srebrnih, 4 bronaste medalje v letu 2024 ter drugo zaporedno absolutno 1. mesto Petra Andolška), kontinuirano založniško dejavnost (Presek, Obzornik, zborniki, spletna trgovina), delo strokovnih odborov v mednarodnih združenjih (IMU, EMS, EPS, IUPAP, IAU, EWP, EWM) ter uspehe posameznikov (Gregor Dolinar kot predsednik IMO

2024–2028, Andrej Guštin kot častni član IAU, Erdősova nagrada Matjažu Željku). Izpostavila je tudi organizacijo seminarjev in srečanj, vzpostavitev štipendijskega sklada, pridobitev statusa RO pri ARIS ter številne aktivnosti za promocijo znanosti in skrb za Plemljevo vilo. Med cilji za leto 2025 je poudarila zaključek cikla državnih tekmovanj, priprave in udeležbo ekip na MMO, MFO, MEO, MOAA, EDMO, MEMO in EFO ter nadaljnje delovanje odborov, založništvo, štipendiranje, organizacijo izobraževanj in iskanje sponzorjev. Prisotni so po krajši razpravi potrdili letno poročilo in finančni načrt. Sledila je predstavitev predlaganih sprememb statuta (Ciril Dominko): med cilje se dodata štipendiranje in skrb za Plemljevo dediščino, Upravni odbor pa se zmanjša s 17 na 7 članov za večjo učinkovitost. Po razpravi je bil statut sprejet; veljati začne s potrditvijo na Upravni enoti, prve volitve po novem pa bodo leta 2026.

V slavnostnem delu sta bili podeljeni dve novi društveni priznanji: mag. Tatjani Štorman in Vincencu Petruni. Za častna člana sta bila izvoljena dr. Marko Razpet in dr. Dragana Mihailović¹.

Občni zbor je delovni predsednik Boštjan Kuzman sklenil s krajšo razpravo pri točki razno: potrdili smo vključitev DMFA v IMO, podprli uvedbo nagrade Ivana Vidava za doktorska dela iz matematike in se seznanili s projektom digitalizacije arhiva Obzornika (A. Jurišić). Poslovili smo se tudi od dolgoletne računovodkinje Simone Puncer Klemenčič. Po odmoru je sledila še Slavnostna akademija ob 75-letnici DMFA Slovenije; več v posebni novici.

Boštjan Kuzman

Slavnostna akademija in podelitev Plemljevih kovancev ob 75-letnici DMFA Slovenije

Društvo DMFA Slovenije je bilo ustanovljeno v Ljubljani 30. oktobra 1949. Z rahlo zamudo smo 75 let svojega delovanja obeležili s posebnim slavnostnim dogodkom, na katerega so bili poleg članov povabljeni tudi predstavniki Ministrstva za vzgojo in izobraževanje in še nekaterih ustanov, ki nas redno podpirajo pri našem delu. Slavnostna akademija je tako potekala 6. marca 2025, takoj po zaključku rednega Občnega zbora društva. Akademijo je otvorila predsednica Mojca Vilfan, ki je pozdravila posebne goste vključno s predstavniki fakultet, predstavnic MVI in predstavnikom ZOTKS, z uvodno glasbeno točko pa nas je v prijetno vzdušje odpeljala strokovnjakinja za teorijo strun, harfistka Bilka Peršič. V nadaljevanju sem podpisani Boštjan Kuzman ob prosojnicah z zgodovinskimi dokumenti predstavil številne

¹Daljši utemeljitvi sta bili objavljeni v 2. številki tega letnika OMF.

mejnike in utrinke iz bogate društvene dediščine, od ustanovitve v času Jugoslavije po drugi svetovni vojni do slovenske osamosvojitve in aktivnega prispevka k razvoju in popularizaciji znanosti v samostojni Sloveniji od leta 1991 do danes.



Slika 2. Predstavitev izjemno bogate zgodovine društva

V prvem delu smo se tako spomnili okoliščin ustanovitve društva v Ljubljani ter prvega kongresa jugoslovanskih matematikov in fizikov na Bledu (1949), številnih podružnic in društvenih sekcij za predavanja in dvig pouka, za terminologijo in za bibliografijo (1950), prvih izvodov revij *Obzornik* (1951) in *Presek* (1972), otvoritve kipa Jurija Vege v Zagorici (1954), prvega seminarja za učitelje fizike (1961), prvih društvenih priznanj za učitelje (1967), praznovanj društvenih obletnic (1959, 1969, 1979), prvih tekmovanj iz matematike (1951) in fizike (1964), prve udeležbe na mednarodni olimpijadi iz matematike (1963), akademije ob 150-letnici rojstva Franca Močnika (1964), prvih Vegovih priznanj za osnovnošolce (1971), mednarodnega kongresa ob 100. obletnici rojstva Josipa Plemlja (1973) in prvega znanstvenega simpozija iz uporabne fizike (1975), otvoritve Plemljeve spominske sobe (1977), številnih razprav o maturi in problemih pouka z učitelji na občnih zborih (1962, 1978, 1987), organizacije Mednarodne olimpijade iz fizike v Portorožu (1985) in nikoli izvedenega velikega jugoslovanskega kongresa v Ljubljani (1990).

Drugi del je predstavil delovanje društva v obdobju samostojne Slovenije. Slovenska vlada je razglasila Plemljevo leto (1992) in društvo se je kot predstavnik Slovenije vključilo v mednarodne organizacije EMS, IMU, EPS

in IUPAP (1992), prvič v imenu Slovenije poslalo tekmovalce na olimpijadi iz matematike in fizike (1993) ter organiziralo svoj prvi (in zaenkrat edini) kongres (1994). V Plemljevi vili že od 1980-tih let potekajo razne priprave in poletne šole, slovenski tekmovalci pa so osvajali vedno višja odličja in zdaj že tudi prve zlate medalje na olimpijadah iz fizike (2002), astronomije (2017), matematike (2021) in ekonomije (2023). Uspešno smo informatizirali domača in organizirali Mednarodno matematično (2006) in Evropsko fizikalno olimpijado (2022) v Ljubljani ter Evropsko deklško olimpijado v Portorožu (2023). Obeležili smo mednarodno leto matematike (2000), fizike (2005) in astronomije (2009) ter jubileje Močnika (2014) in Plemlja (2023), soorganizirali Evropski matematični kongres (2021), se vključili v Mednarodno astronomsko unijo (2018), praznovali 70-letnico s prireditvijo Bistroumi v Cankarjevem domu in sprejemom pri predsedniku države (2019), ter kot vsa leta obstoja izvajali obilo strokovnih, založniških in popularizacijskih dejavnosti.



Slika 3. Podeljevanje Plemljevih kovancev

Čestitko in zahvalo ob tako bogatem dolgoletnem delovanju društva je prisotnim ob zaključku izrekla ga. Janja Zupančič predstavnica Ministrstva za vzgojo in izobraževanje, ki je nato skupaj s predsednico društva Mojco Vilfan podelila priložnostne zahvale in 50 Plemljevih kovancev za tiste posameznike in ustanove, ki so v zadnjih 10 letih v veliki meri prispevali k delovanju društva. Prejeli so jih: Peter Legiša, Sašo Strle, Matjaž Željko, Janez Krušič, Primož Potočnik, Matej Brešar, Neža Mramor Kosta, Dragan Mihailović, Barbara Rovšek, Andrej Guštin, Andreja Gomboc, Dunja Fabjan, Klemen Šivic, Gregor Dolinar, Lucijana Kračun Berc, Sandra Cigula, Lovro Dretnik, Nik Stopar, Jurij Bajc, Nada Razpet, Izidor Haf-

ner, Aleš Mohorič, Ciril Dominko, Boštjan Kuzman, David Gajser, Nejc Zajc, Aleš Toman, Tomaž Košir, Damjana Kokol Bukovšek, Cvetka Gomboc Alt, Aljoša Brlogar, Luka Horjak, Vid Kavčič, Klavdija Mlinšek Cof, Lucija Željko, Martin Klanjšek, Peter Jeglič, Simon Čopar, Sergej Faletič, Mihael Gojkošek, Darjo Felda, Saša Dolenc, Marjeta Kramar Fijavž, Jasna Prezelj, ter ustanove Fakulteta za matematiko in fiziko UL, Fakulteta za naravoslovje in matematiko UM, Pedagoška fakulteta UL, Univerza v Novi Gorici in Univerza na Primorskem, en kovanec pa je ostal simbolično nepodeljen za vse tiste, ki so prav tako veliko prispevali, a smo njihov prispevek morda pozabili omeniti.



Slika 4. Prejemniki Plemljjevih kovancev in drugi gostje

Boštjan Kuzman

Spremembe statuta DMFA Slovenije

Člani in članice društva DMFA Slovenije so na Izrednem občnem zboru 2. oktobra 2025 sprejeli nov statut društva. Izredni Občni zbor je bil sklican zaradi nujnih uskladitev statuta z zahtevami Ministrstva za vzgojo in izobraževanje in Upravne enote Ljubljana, ki je novi statut 23. oktobra 2025 tudi potrdila. Člane in članice vabimo, da se seznaniijo s spremembami statuta, ki je v celoti dosegljiv na spletni strani društva. Najpomembnejša sprememba je zmanjšanje Upravnega odbora iz dosedanjih 17 na 7 članov

(člen 22), kar bo predvidoma omogočilo učinkovitejše delovanje. Prve volitve po novem statutu bodo izvedene na Občnem zboru, ki bo predvidoma potekal marca 2026. Druge spremembe statuta so še:

- V 5. členu se ločijo nameni in cilji Društva. Med cilje se poleg skrbi za Plemljevo zapuščino doda cilj ohranjanja spomina na vidne slovenske matematike, fizike in astronome.
- V 6. členu, ki definira dejavnosti, s katerimi Društvo dosega svoje cilje, se na novo specificirajo nepridobitne in pridobitne dejavnosti. Pridobitne dejavnosti se klasificira na podlagi novih Standardnih klasifikacij dejavnosti v Uradnem listu (SKD 2025).
- V 8. členu, ki definira častne člane, se besedo oseba spremeni v besedo član.
- V 15. členu, ki definira občne zборе, se popravi, da lahko skliče redni občni zbor le predsednik Društva.
- V 16. členu se dodatno definira, kako so člani Društva DMFA Slovenije obveščeni o sklicu občnega zbora.
- V 23. členu, ki definira naloge upravnega odbora, se črta, da lahko upravni odbor predstavlja Društvo pred javnostjo.
- V 26. členu, ki definira naloge podpredsednika Društva, se popravi, da lahko podpredsednik začasno vodi Društvo samo po pisnem pooblastilu predsednika, ne pa tudi upravnega odbora.
- V 47. členu se, na podlagi zaprosila Ministrstva za vzgojo in izobraževanje, definira prenos premoženja Društva DMFA Slovenije v primeru prenehanja delovanja, v primeru, da ima Društvo DMFA Slovenije status nevladne organizacije v javnem interesu na področju vzgoje in izobraževanja.

Boštjan Kuzman

Tatjana Štorman in Vincenc Petruna prejemnika priznanj DMFA Slovenije

DMFA Slovenije že od leta 1968 podeljuje društvena priznanja priznanja z namenom promocije uspešnega strokovnega in pedagoškega dela posameznikov ali ustanov na področjih matematike, fizike in astronomije, predvsem za uspešno delo z mladimi ali za strokovno dejavnost, ter posameznikom



Slika 1. Prejemnika priznanj mag. Tatjana Štorman in Vincenc Petruna

ali ustanovam za uspešno sodelovanje z Društvom. Na 79. Občnem zboru DMFA Slovenije 6. marca 2025 v Ljubljani je komisija za priznanja podelila 2 priznanji, ki sta ju prejela **mag. Tatjana Štorman**, profesorica matematike na Gimnaziji Lava, Celje, za *kvalitetno delo pri pouku matematike in za sodelovanje pri organizaciji vrste mednarodnih matematičnih dogodkov*, in **Vincenc Petruna**, upokojeni profesor matematike in fizike na Gimnaziji in SŠ Črnomelj, za *izjemen življenjski prispevek k mentorstvu mladih talentov in izobraževanju na področjih matematike in fizike v lokalnem okolju*.

Mag. Tatjana Štorman je leta 2003 diplomirala in leta 2010 magistrirala iz pedagoške matematike na FMF. Od leta 2003 poučuje matematiko na Gimnaziji Lava v Celju. Po mnenju sodelavk in sodelavcev ima izjemen posluh za delo z dijaki – zna se posvetiti tako nadarjenim v krožku kot tudi matematično šibkejšim, svoj pouk pa popestri z didaktičnimi igrami in strokovno učno literaturo. Z matematično natančnostjo in čustvenim pedagoškim pristopom postavlja v aktivu nove standarde ter je cenjena zaradi strokovnosti in zagnanosti. Že vrsto let sodeluje pri organizaciji matematičnih tekmovanj, veliko pa je prispevala tudi k uspešni organizaciji Mednarodne matematične olimpijade 2006, srečanja Mednarodni matematični kenguru 2011, Srednjeevropske matematične olimpijade 2015 in Mednarodne dekliske olimpijade 2023 v Sloveniji.

Vincenc Petruna je diplomiral iz pedagoške matematike na takratni FNT v Ljubljani. Na Srednji šoli v Črnomlju je poučeval 40 let, vse do upokojitve leta 2013. V bogati karieri je poleg matematike poučeval tudi fiziko, informatiko in nekatere druge predmete. Vodil je številne krožke, med njimi šahovski, fotografski, fizikalni, računalniški in astronomski krožek. Bil je mentor številnim uspešnim tekmovalcem ter trinajstim raziskovalnim nalogam v okviru Gibanja Znanost mladini in trem nalogam za Krkine nagrade.



Slika 2. Podelitev priznanja na Občnem zboru DMFA Slovenije

V devetdesetih letih je kot član skupine za prenovu pouka fizike sodeloval pri pisanju učbenikov ter prispeval programsko opremo za merilno-krmilni vmesnik. Med prvimi v Sloveniji je uvedel spletne učilnice za interaktivno delo z dijaki in vzpostavil odlično prakso dela z nadarjenimi pri pripravah na državna tekmovanja. Svoje znanje je rad delil tudi sodelavcem in kolegom zunaj šole. Kot pobudnik strokovnih aktivov učiteljev matematike in fizike Bele krajine je na srečanjih redno predstavljal strokovne teme ter spodbujal dodatne dejavnosti. Aktiven ostaja tudi v pokoju – na svojih spletnih straneh še vedno objavlja pronicljive zapise o matematiki, fiziki, izobraževanju ter hobijih, kot sta čebelarstvo in sadjarstvo.

Komisija za društvena priznanja se zahvaljuje vsem, ki so poslali predloge, in tudi v prihodnje vabi širše članstvo k predlaganju kandidatov in kandidatke, ki s kvalitetnim pedagoškim in strokovnim delom izstopajo v svojem okolju.

Boštjan Kuzman

DIAMANTNI SPONZOR DMFA SLOVENIJE



OBZORNIK ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

LJUBLJANA, JANUAR 2026

Letnik 72, številka 4

ISSN 0473-7466, UDK 51 + 52 + 53

VSEBINA

Članki	Strani
Kratka zgodovina perspektive in njene povezave z geometrijo (Jurij Kovič)	121–140
Nobelova nagrada za fiziko 2025 (Rok Žitko)	141–151
Nove knjige	
Tomaž Zwitter: Zvezde, osončja in njihovo opazovanje (Andrej Prša) ..	152–153
Novice	
Poročilo o 79. Občnem zboru DMFA Slovenije (Boštjan Kuzman)	154–155
Slavnostna akademija in podelitev Plemljevih kovancev ob 75-letnici DMFA Slovenije (Boštjan Kuzman)	155–158
Spremembe statuta DMFA Slovenije (Boštjan Kuzman)	158–159
Tatjana Štorman in Vincenc Petruna prejemnika priznanj DMFA Slovenije (Boštjan Kuzman)	159–XV

CONTENTS

Articles	Pages
A brief history of perspective and its connections with geometry (Jurij Kovič)	121–140
Nobel Prize in Physics 2025 (Rok Žitko)	141–151
New books	152–153
News	154–XV

Na naslovnici: znamenita Dürerjeva ilustracija »Der Zeichner des liegenden Weibes« (1525), iz njegove knjige *Underweysung der Messung*. Podoba predstavlja enega najprepoznavnejših zgodnjih prikazov renesančne linearne perspektive: risar sedi pred okvirjem z napeto mrežo, skozi katero opazuje ležeči model, s čimer natančno določa zorne črte in razmerja. Ilustracija nazorno uteleša temeljne koncepte perspektive – zorno točko, ravnino slike in geometrijsko konstrukcijo pogleda – kar se neposredno navezuje na osrednje teme članka o zgodovinskem razvoju perspektive in njenem prepletu z geometrijo.