Šolsko tekmovanje 2016 (nadaljevanje)

Konkurenčni banki ponujata polletne **depozite z naraščajočo obrestno mero**.

Depozit se prvi mesec obrestuje po letni obrestni meri **1,5 %**, naslednja dva meseca po letni obrestni meri **1,8 %**, zadnje tri mesece pa po letni obrestni meri **2,4 %**. Privzemi, da na vsaki od bank vežemo po **1000 €**.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti, v odstotkih pa na pet decimalnih mest.

c) Banka B uporablja **konformno mesečno obrestovanje**. Kolikšen znesek imamo ob koncu depozita?

Rešitev naloge c)

$G_0 = 1000\ €$

$p_1\ \% = 1{,}5\ \%$
$m_1 = 1$ mesec

$p_2\ \% = 1{,}8\ \%$
$m_2 = 2$ meseca

$p_3\ \% = 2{,}4\ \%$
$m_3 = 3$ mesece

$G_6 = ?$

Konformno mesečno obrestovanje

→ mesečni obrestni faktor $r = \sqrt[12]{1+\frac{p}{100}}$ in $G_6 = G_0 \cdot r^6$

upoštevamo različne obrestne mere

$r_1 = \sqrt[12]{1+\frac{p_1}{100}} = \sqrt[12]{1+\frac{1{,}5}{100}} = \sqrt[12]{1{,}015}$

$r_2 = \sqrt[12]{1+\frac{p_2}{100}} = \sqrt[12]{1+\frac{1{,}8}{100}} = \sqrt[12]{1{,}018}$

$r_3 = \sqrt[12]{1+\frac{p_3}{100}} = \sqrt[12]{1+\frac{2{,}4}{100}} = \sqrt[12]{1{,}024}$

$G_6 = G_0 \cdot r_1^{m_1} r_2^{m_2} r_3^{m_3}$

$G_6 = 1000 \cdot \sqrt[12]{1{,}015} \cdot \sqrt[12]{1{,}018}^2 \cdot \sqrt[12]{1{,}024}^3$

$G_6 = 1000 \cdot \sqrt[12]{1{,}015} \cdot \sqrt[6]{1{,}018} \cdot \sqrt[4]{1{,}024}$

$G_6 = 1010{,}19\ €$

Šolsko tekmovanje 2016 (nadaljevanje)

UL EF 80!

Konkurenčni banki ponujata polletne **depozite z naraščajočo obrestno mero**.

Depozit se prvi mesec obrestuje po letni obrestni meri **1,5 %**, naslednja dva meseca po letni obrestni meri **1,8 %**, zadnje tri mesece pa po letni obrestni meri **2,4 %**. Privzemi, da na vsaki od bank vežemo po **1000 €**.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti, v odstotkih pa na pet decimalnih mest.

c) Banka B uporablja **konformno mesečno obrestovanje**. Kolikšen znesek imamo ob koncu depozita?

d) Kolikšna bi morala biti **nespremenljiva** letna **obrestna mera** s konformnim mesečnim obrestovanjem pri banki B, da bi pri vezavi za pol leta dobili enak končni znesek kot v c)?

Se nadaljuje …

Rešitev naloge d)

UL EF 80!

$G_0 = 1000\ €$

$p_1\ \% = 1{,}5\ \%$
$m_1 = 1$ mesec

$p_2\ \% = 1{,}8\ \%$
$m_2 = 2$ meseca

$p_3\ \% = 2{,}4\ \%$
$m_3 = 3$ mesece

$G_6 = 1010{,}19\ €$

Nespremenljiva obrestna mera $p\ \%$
$\Rightarrow$ konstanten mesečni obrestni faktor $r = \sqrt[12]{1+\frac{p}{100}}$

$G_6 = G_0 \cdot r^6$

$r^6 = \frac{G_6}{G_0}$

$r = \sqrt[6]{\frac{G_6}{G_0}}$

$r = \sqrt[m_1+m_2+m_3]{r_1^{m_1} r_2^{m_2} r_3^{m_3}}$

utežena geometrijska sredina

$r^{12} = 1 + \frac{p}{100}$

$r^{12} - 1 = \frac{p}{100}$

$p = 100(r^{12}-1)$

$p = 100\left(\sqrt[6]{\frac{G_6}{G_0}}^{12} - 1\right)$

$p = 100\left(\left(\frac{G_6}{G_0}\right)^2 - 1\right)$

$p = 100 \cdot \left(\left(\frac{1010{,}19}{1000}\right)^2 - 1\right) = 2{,}04838$

$p\,\% = 2{,}04838\ \%$

Šolsko tekmovanje 2022

UL EF 80!

Državna zakladnica je izdala **šestmesečne**, **dvanajstmesečne** in **osemnajstmesečne** zakladne menice. To so netvegane brezkuponske obveznice z nominalnimi vrednostmi **1000 €**. V sporočilu za javnost so zapisali, da je cena šestmesečne menice znašala **978 €**, dvanajstmesečne **939 €**, osemnajstmesečne pa **892,90 €**.

a) Pri vrednotenju zakladnih menic uporabljamo **navadno obrestovanje**. Določi obrestne mere $R(0,\frac{1}{2})$, $R(0,1)$ in $R(0,\frac{3}{2})$, po katerih se je zadolžila država.

Rešitev naloge a)

UL EF 80!

$P = N \cdot D(0,T)$ ← navadno obrestovanje

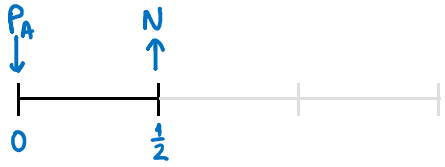
$P = \frac{N}{1+R(0,T)\cdot T} \Rightarrow 1+R(0,T)\cdot T = \frac{N}{P}$

$R(0,T)\cdot T = \frac{N}{P} - 1$

$R(0,T) = \frac{1}{T}\left(\frac{N}{P} - 1\right)$

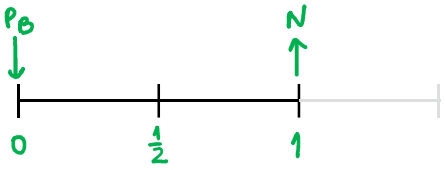
$N = 1000\ €$

$T_A = \frac{1}{2}$ leta
$P_A = 978\ €$



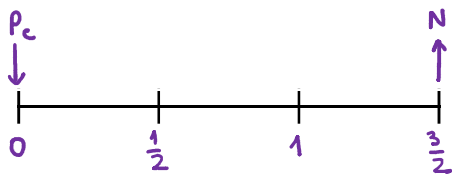
$R(0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\left(\frac{1000}{978} - 1\right) = 0{,}0449898 = 4{,}50\%$

$T_B = 1$ leto
$P_B = 939\ €$



$R(0,1) = \frac{1}{1}\left(\frac{1000}{939} - 1\right) = 0{,}064963 = 6{,}50\%$

$T_C = \frac{3}{2}$ leta
$P_C = 892{,}90\ €$



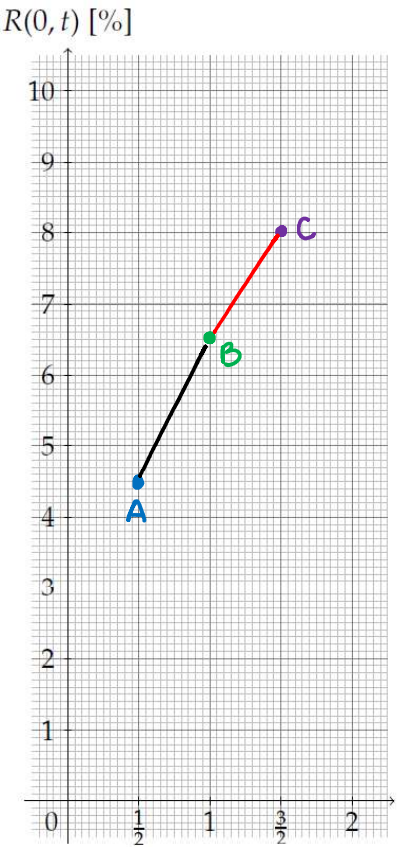
$R(0,\frac{3}{2}) = \frac{1}{\frac{3}{2}}\left(\frac{1000}{892{,}90} - 1\right) = 0{,}079964 = 8{,}00\%$

Šolsko tekmovanje 2022

UL EF 80!

b) Privzemi, da je **časovna struktura** obrestne mere $R(0,t)$ zvezna in odsekoma linearna z delilnimi točkami pri $t=\frac{1}{2}$, $t=1$ in $t=\frac{3}{2}$. Nariši graf časovne strukture obrestne mere $R(0,t)$ v odstotkih za obdobje $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$ ter določi njen analitični predpis.

Nasvet: Analitični predpis sestavljata linearni funkciji $R_i(0,t) = k_i t + n_i$, kjer indeks $i=1$ ustreza obdobju $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, indeks $i=2$ pa obdobju $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$.



Rešitev naloge b)

UL EF 80!

$R\left(0,\frac{1}{2}\right) = 4{,}50\ \%$

$R(0,1) = 6{,}50\ \%$

$R\left(0,\frac{3}{2}\right) = 8{,}00\ \%$

$R(0,t) = ?$

Obdobje $[\frac{1}{2}, 1]$: $A(\frac{1}{2}, 4.5)$ $B(1, 6.5)$

Enačba premice: $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$R - R_A = \frac{R_B - R_A}{t_B - t_A}(t - t_A)$

$R - 4{,}5 = \frac{2}{\frac{1}{2}}(t - \frac{1}{2})$

$R = 4(t - \frac{1}{2}) + 4{,}5 = \underline{4t + 2{,}5}$

Obdobje $[1, \frac{3}{2}]$:

$B(1, 6.5)$ $C(\frac{3}{2}, 8)$

$R - R_B = \frac{R_C - R_B}{t_C - t_B}(t - t_B)$

$R - 6{,}5 = \frac{1{,}5}{0{,}5}(t - 1)$

$R = 3(t-1) + 6{,}5 = \underline{3t + 3{,}5}$

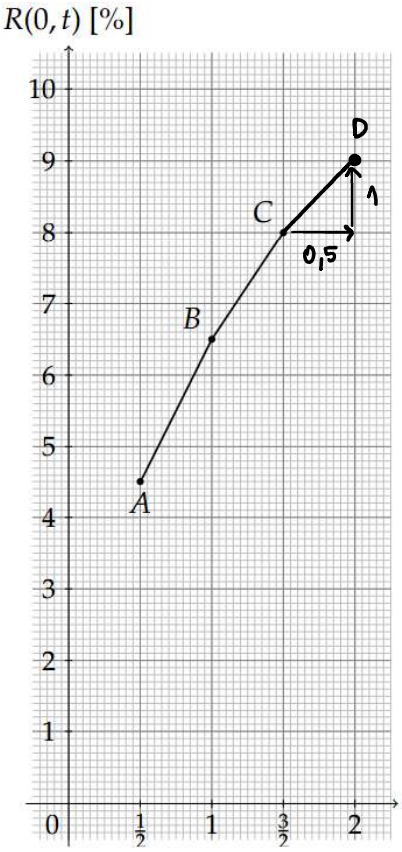
$$R(0,t) = \begin{cases} 4t + 2{,}5 ; & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 3t + 3{,}5 ; & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Šolsko tekmovanje 2022

UL EF 80!

c) Časovno strukturo želimo podaljšati do časa $t = 2$ s pomočjo še tretje linearne funkcije $R_3(0,t) = k_3 t + n_3$. Privzemi, da smerni koeficienti k_1, k_2, k_3 sestavljajo **aritmetično zaporedje** in da je časovna struktura zvezna. Določi obrestno mero $R(0,2)$ in dopolni graf iz naloge b).

d) Zaradi interesa vlagateljev država izda še milijon **dveletnih** zakladnih menic z nominalno vrednostjo **1000 €**. Določi ceno dveletne menice in znesek, ki ga z dodatno izdajo zbere država.



Rešitev nalog c) in d)

UL EF 80!

$k_1 = 4$ ↓ −1

$k_2 = 3$ ↓ −1

$k_3 = 2$

$R(0,2) = 9\%$

Nova izdaja:

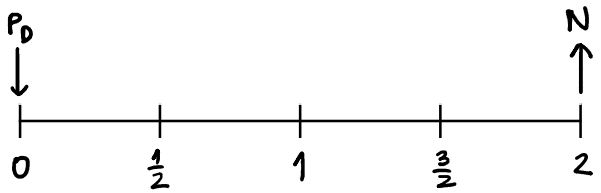
$n = 10^6$

$T = 2$ leti

$N = 1000$ €

$P_D = ?$

Pomen smernega koeficienta:
če x povečamo za 1 enoto, se y spremeni za k



$P_D = N \cdot D(0,2) = \dfrac{N}{1 + R(0,2) \cdot 2}$

$P_D = \dfrac{1000}{1 + 0{,}09 \cdot 2} = 847{,}46$ € ← vlagatelji plačajo zaokroženo ceno

Zbrana sredstva

$10^6 \cdot 847{,}46$ € $= 847.460.000$ €