Medletno in zvezno obrestovanje Obveznice

Dr. Aleš Toman

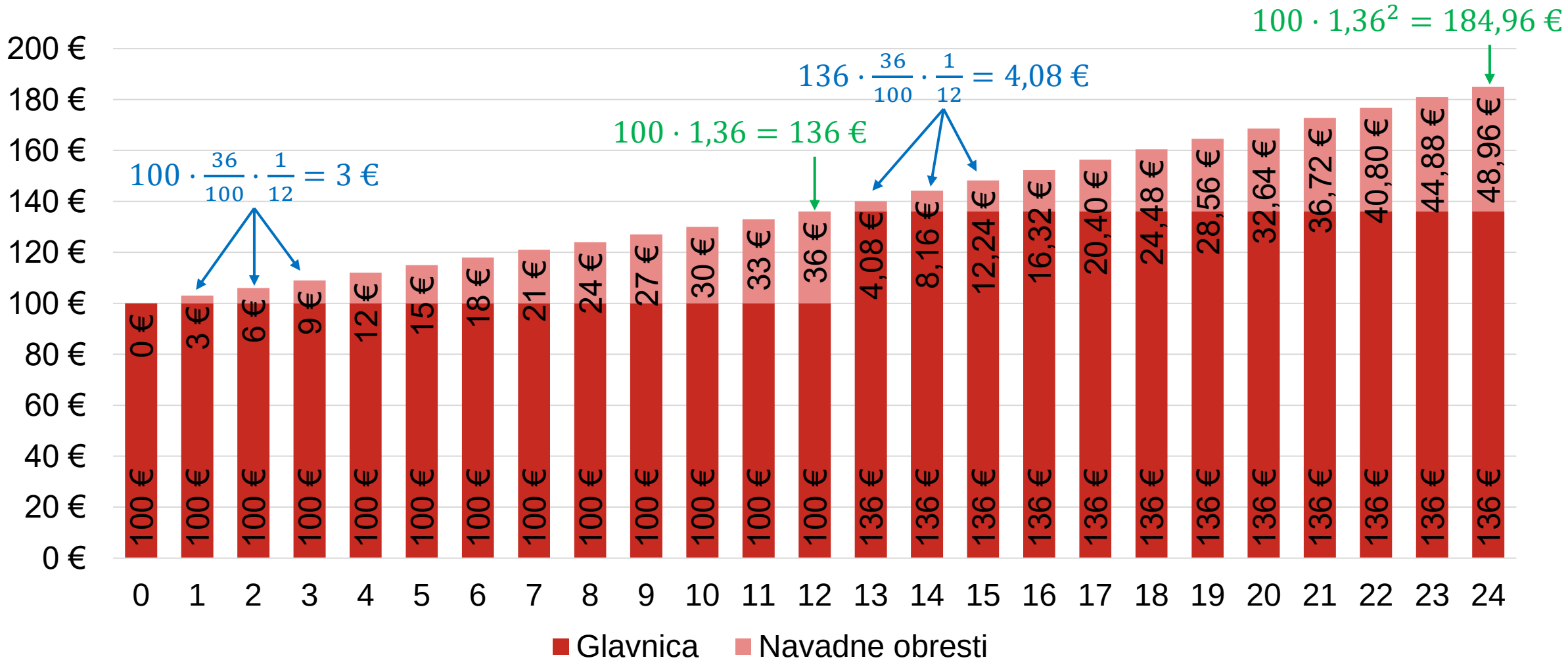
UL EF in DMFA Slovenije

Drugo spletno predavanje iz finančne matematike

5. november 2026

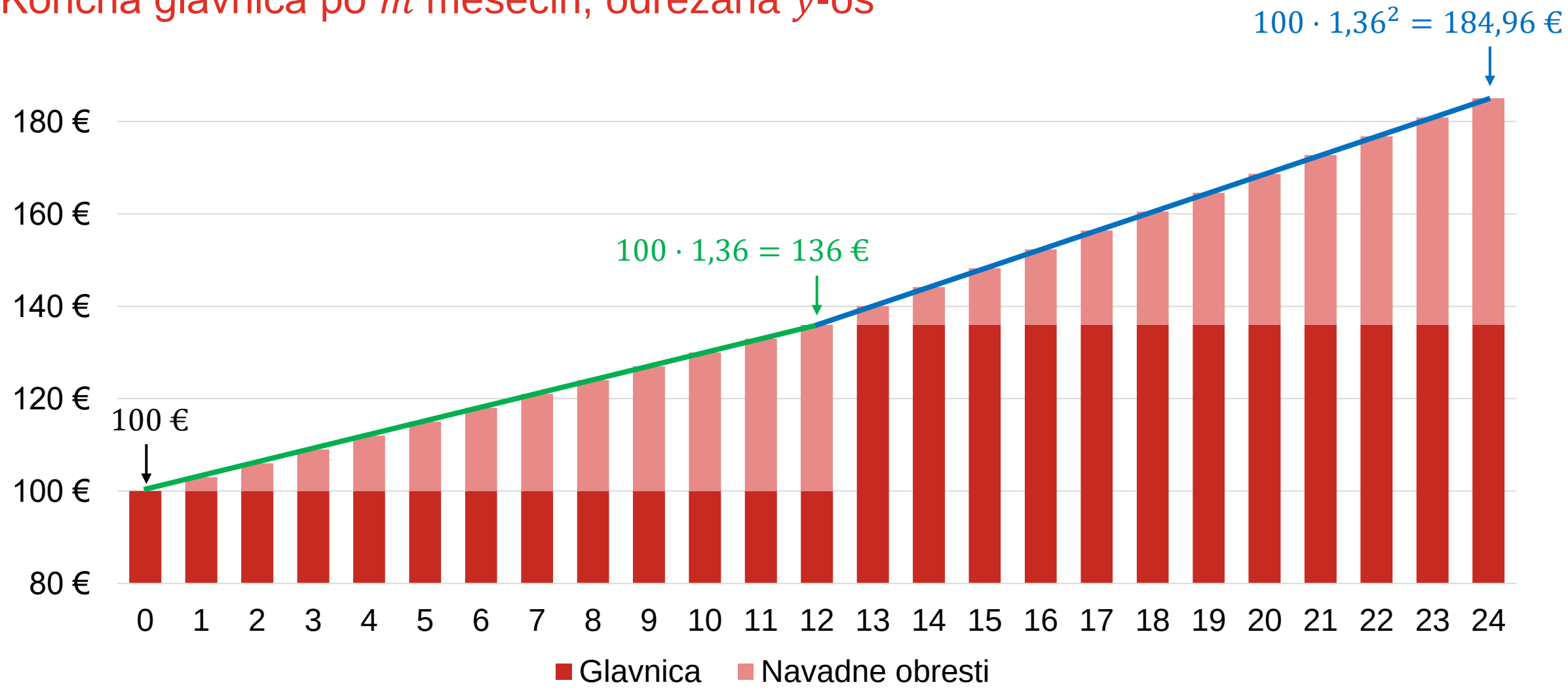
Letno obrestno obrestovanje: $G_0 = 100\ €,\quad p\ \% = 36\ \%$

Končna glavnica po m mesecih, letni obrestni faktor $r = 1{,}36$



Letno obrestno obrestovanje: $G_0 = 100\ €,\quad p\ \% = 36\ \%$

Končna glavnica po m mesecih, odrezana y-os



Medletno obrestovanje

Relativni način

Konformni način

Polletno obrestovanje: Relativna obrestna mera

Letna obrestna mera p %

Navadne obresti v prvem polletju znašajo $o_1 = G_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2}$.

Naobrestena glavnica ob koncu prvega polletja znaša

$$G_1 = G_0 + o_1 = G_0 + G_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2} = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 2}\right)$$

in se nadalje **navadno** obrestuje v drugem polletju:

$$G_2 = G_1 + o_2 = G_1 + G_1 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{1}{2} = G_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 2}\right) = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 2}\right)^2$$

Relativni polletni obrestni faktor: $r = 1 + \frac{p}{100 \cdot 2}$

Končna vrednost glavnice po n polletjih: $G_n = G_0 \cdot r^n$

Relativna polletna obrestna mera: $p_R = \frac{p}{2}$

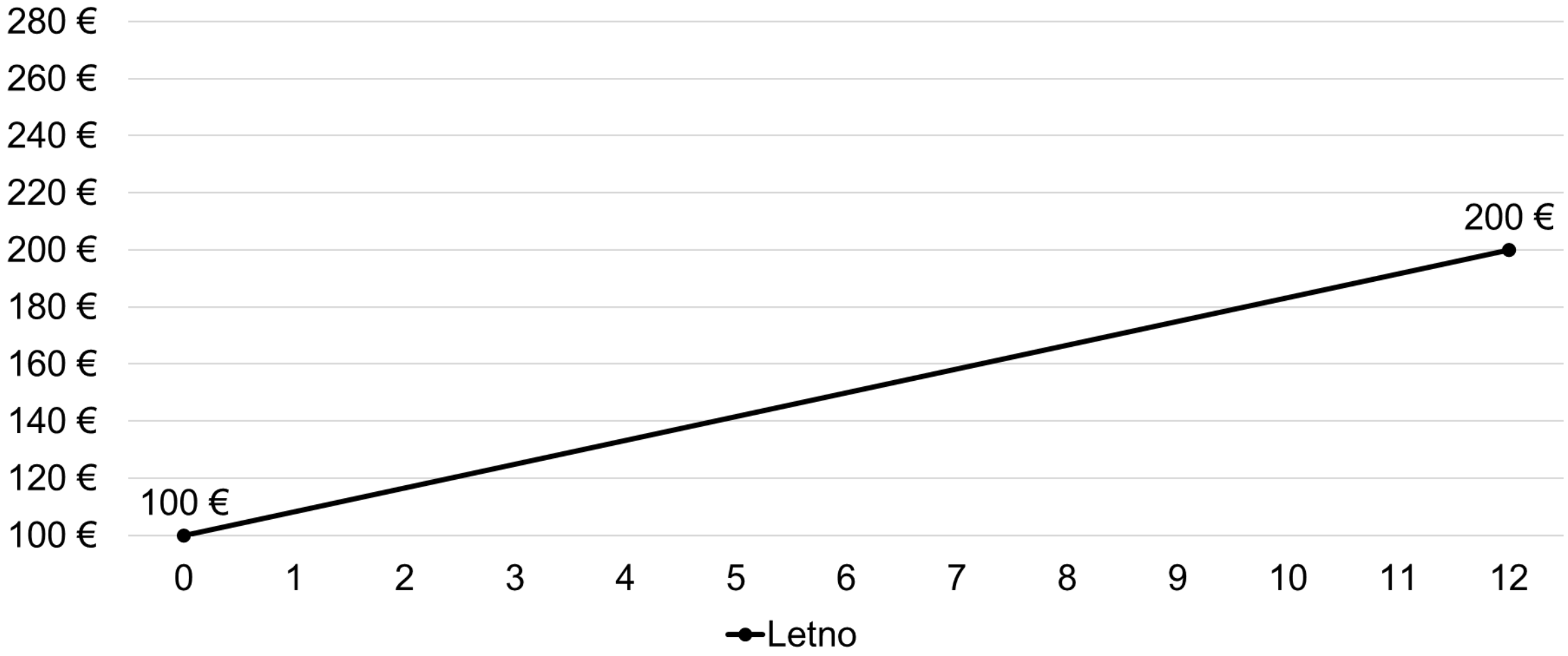
Relativno obrestovanje

Letna obrestna mera p %

Obrestovanje	Obrestni faktor	Glavnica po enem letu
Polletno	$r = 1 + \frac{p}{100 \cdot 2}$	$G_K = G_0 \cdot r^2 \quad = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 2}\right)^2$
Četrtletno	$r = 1 + \frac{p}{100 \cdot 4}$	$G_K = G_0 \cdot r^4 \quad = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 4}\right)^4$
Mesečno	$r = 1 + \frac{p}{100 \cdot 12}$	$G_K = G_0 \cdot r^{12} \quad = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 12}\right)^{12}$
Dnevno	$r = 1 + \frac{p}{100 \cdot 365}$	$G_K = G_0 \cdot r^{365} = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100 \cdot 365}\right)^{365}$
Zvezno		$G_K = \qquad\qquad = G_0 \cdot e^{\frac{p}{100}}$

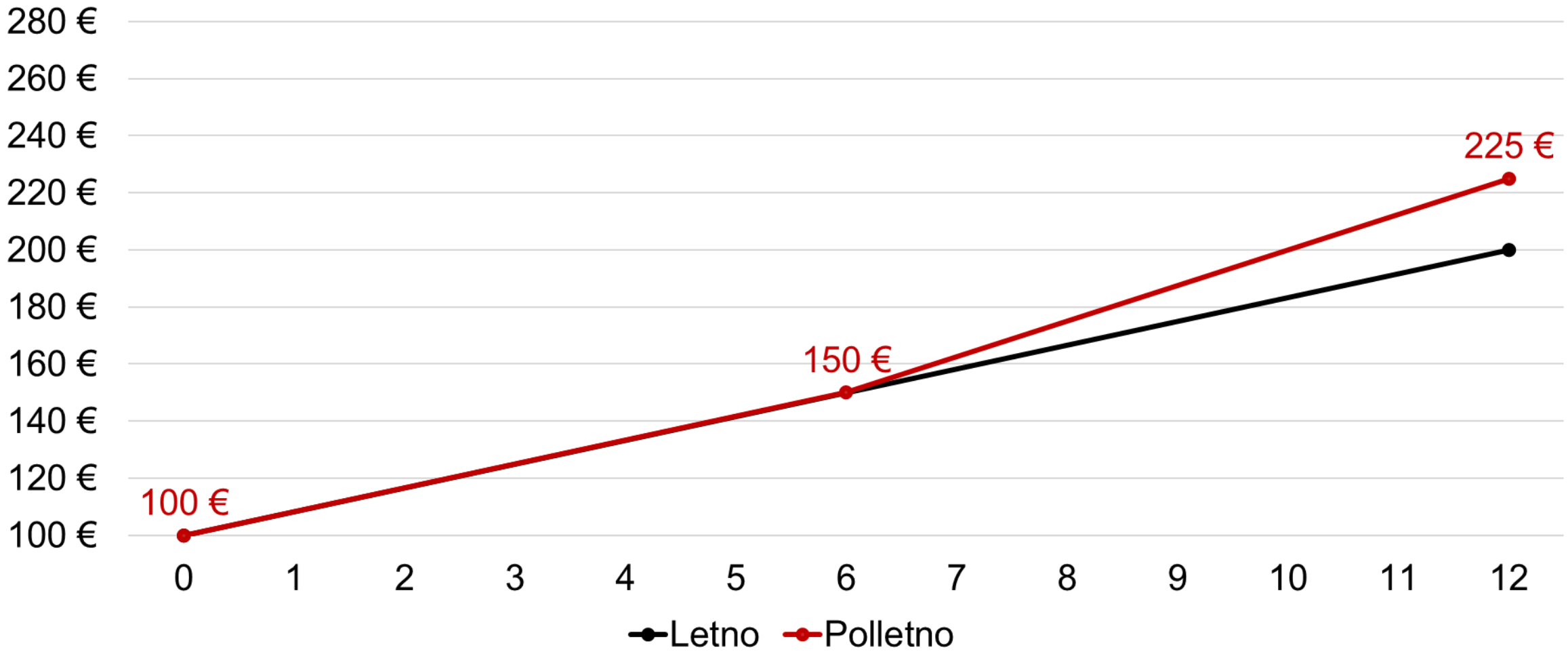
Relativno obrestovanje: $G_0 = 100\ €, \quad p\ \% = 100\ \%$

Končna glavnica po m mesecih



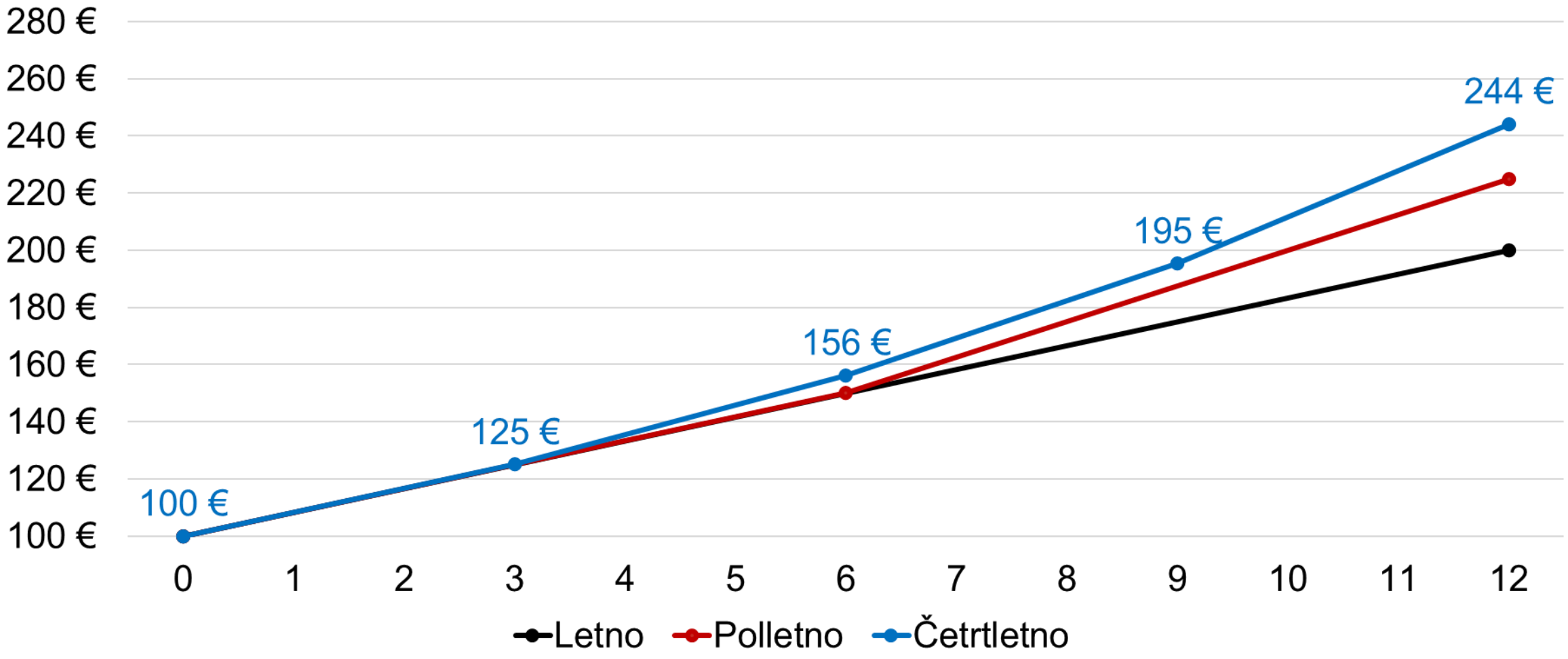
Relativno obrestovanje: $G_0 = 100\ €, \quad p\ \% = 100\ \%$

Končna glavnica po m mesecih



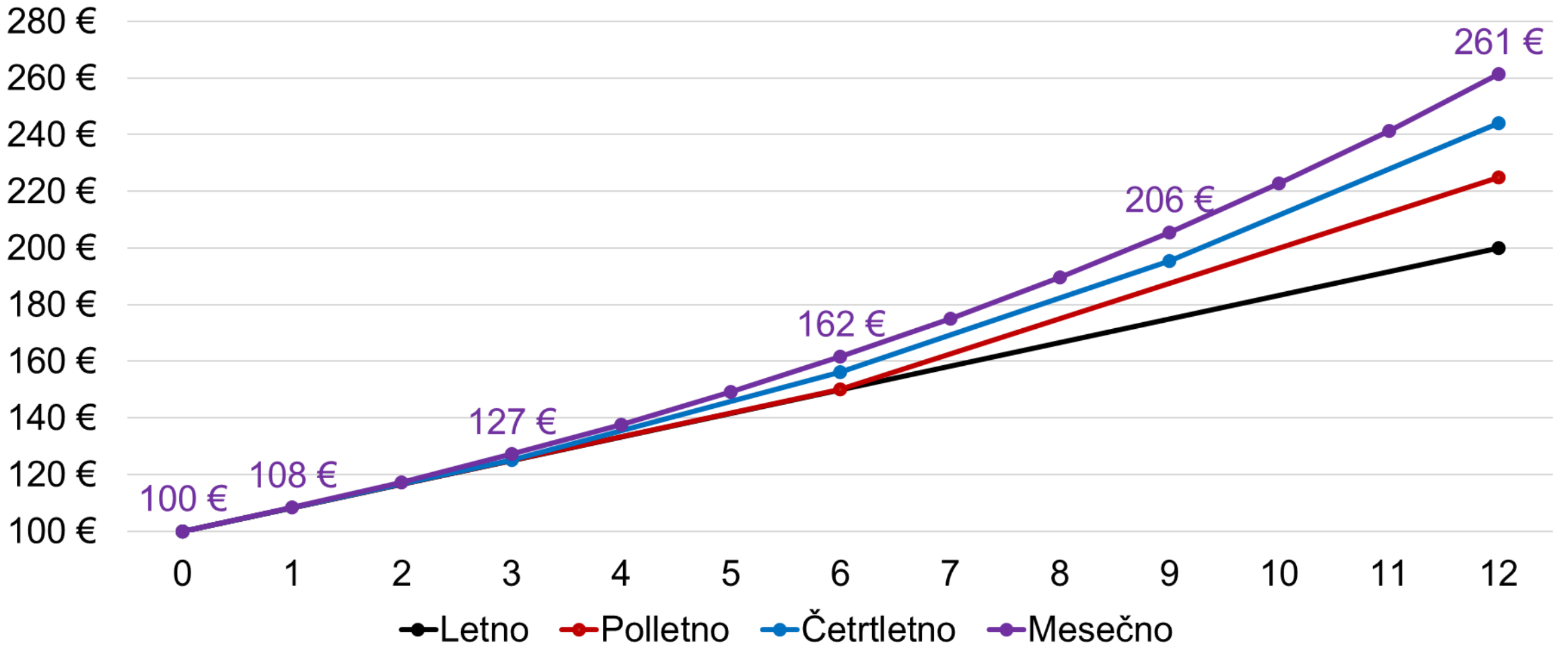
Relativno obrestovanje: $G_0 = 100\ €, \quad p\ \% = 100\ \%$

Končna glavnica po m mesecih



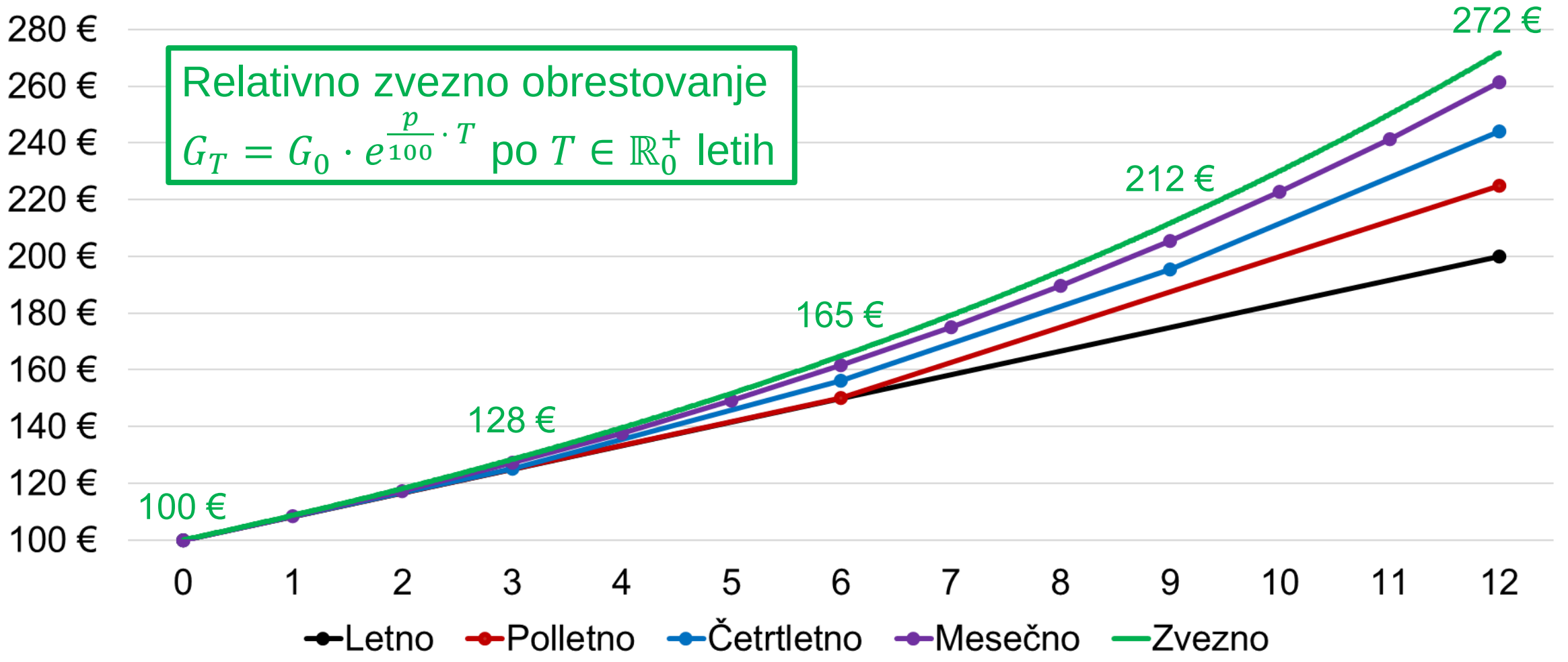
Relativno obrestovanje: $G_0 = 100\ €, \quad p\ \% = 100\ \%$

Končna glavnica po m mesecih



Relativno obrestovanje: $G_0 = 100\ €, \quad p\ \% = 100\ \%$

Končna glavnica po m mesecih



Polletno obrestovanje: Konformna obrestna mera

Letna obrestna mera p %

Iščemo polletno obrestno mero p_K % in polletni obrestni faktor r, ki ob dani začetni glavnici s polletnim obrestovanjem v enem letu prineseta **enako končno glavnico kot letno obrestovanje**:

$$G_0 \cdot r^2 = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

Konformni polletni obrestni faktor: $r = \sqrt{1 + \frac{p}{100}}$

Končna vrednost glavnice po n polletjih: $G_n = G_0 \cdot r^n$

Konformna polletna obrestna mera: $p_K = 100\left(\sqrt{1 + \frac{p}{100}} - 1\right)$

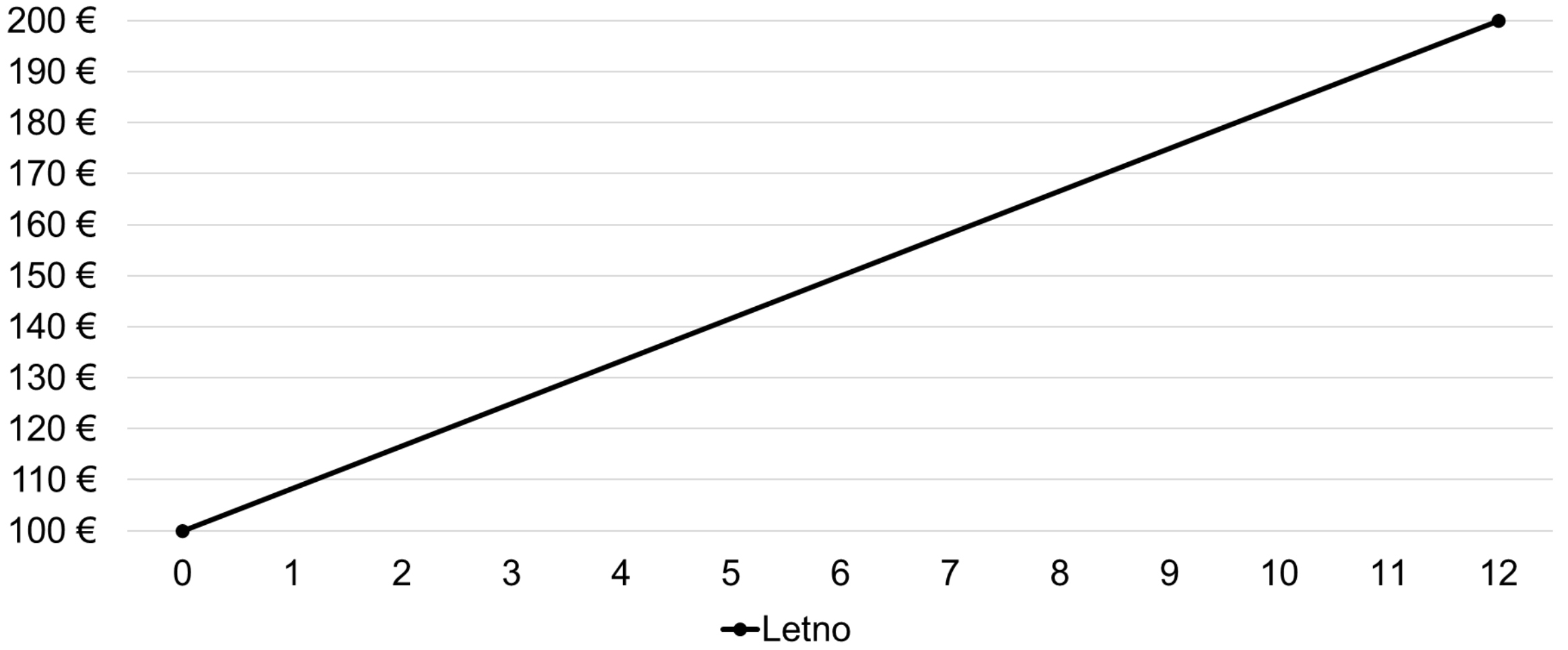
Konformno obrestovanje

Letna obrestna mera p %

Obrestovanje	Obrestni faktor	Zaporedje glavnic v prvem letu
Polletno	$r = \sqrt{1 + \frac{p}{100}}$	$G_0 \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{1/2} \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{2/2}$
Četrtletno	$r = \sqrt[4]{1 + \frac{p}{100}}$	$G_0 \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{1/4} \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{2/4} \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{3/4} \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{4/4}$
Mesečno	$r = \sqrt[12]{1 + \frac{p}{100}}$	$G_0 \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{1/12} \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{2/12} \to \cdots \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{11/12} \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12/12}$
Dnevno	$r = \sqrt[365]{1 + \frac{p}{100}}$	$G_0 \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{1/365} \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{2/365} \to \cdots \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{364/365} \to G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{365/365}$
Zvezno		$G_T = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^T$

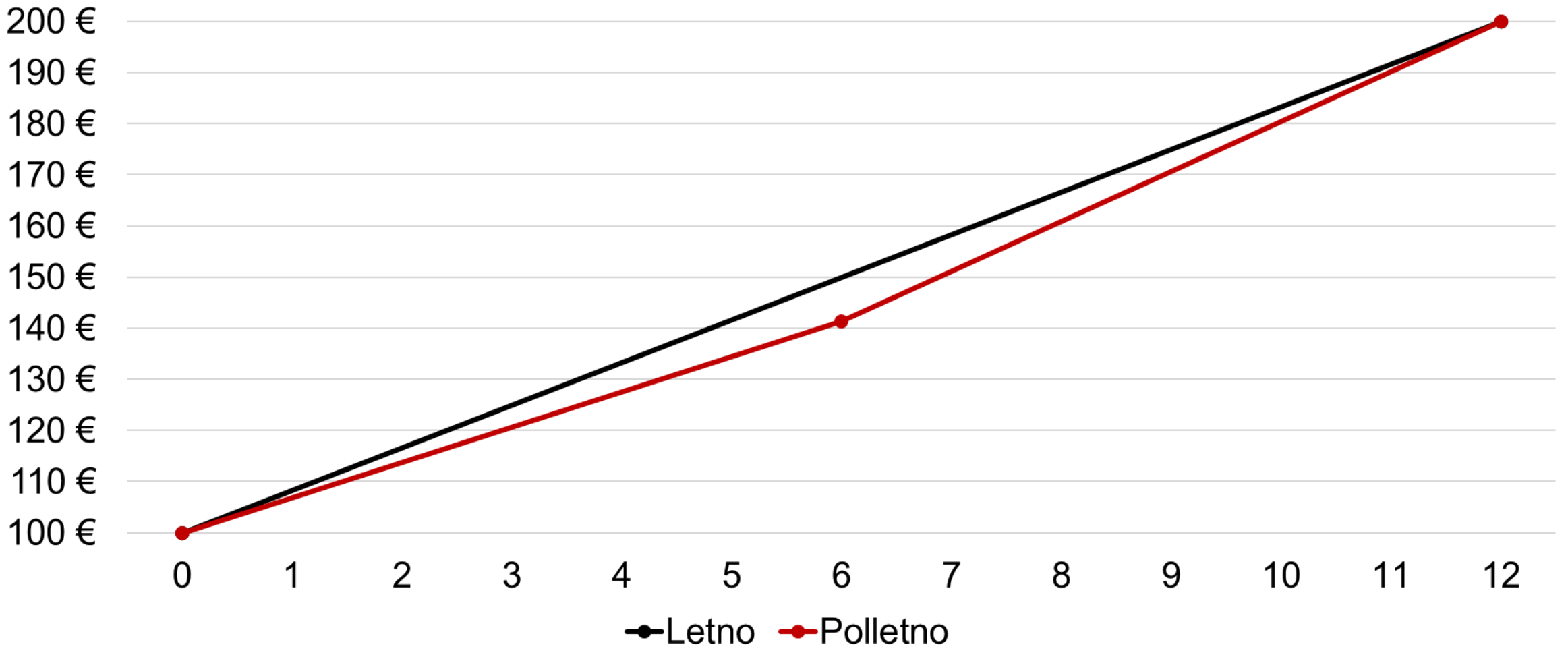
Konformno obrestovanje: $G_0 = 100\ €, \quad p\ \% = 100\ \%$

Končna glavnica po m mesecih



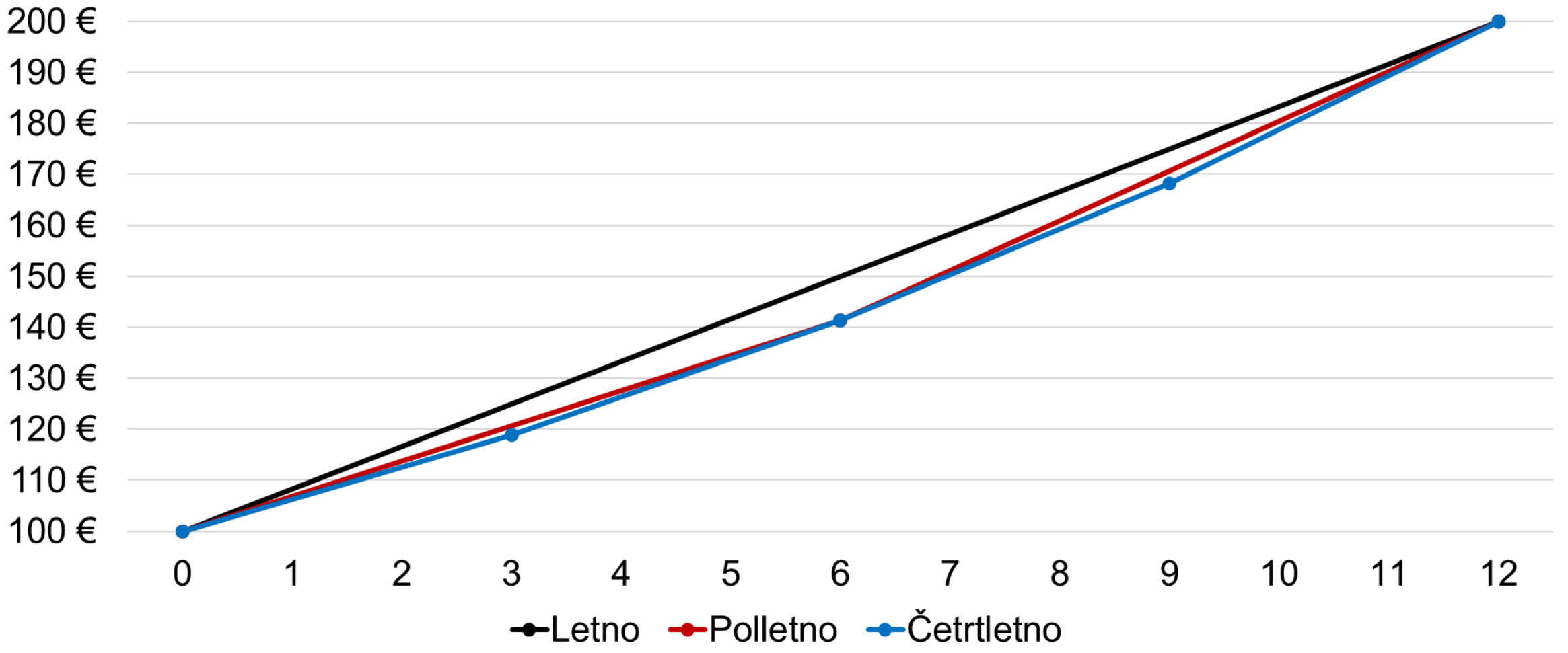
Konformno obrestovanje: $G_0 = 100\ €, \quad p\ \% = 100\ \%$

Končna glavnica po m mesecih



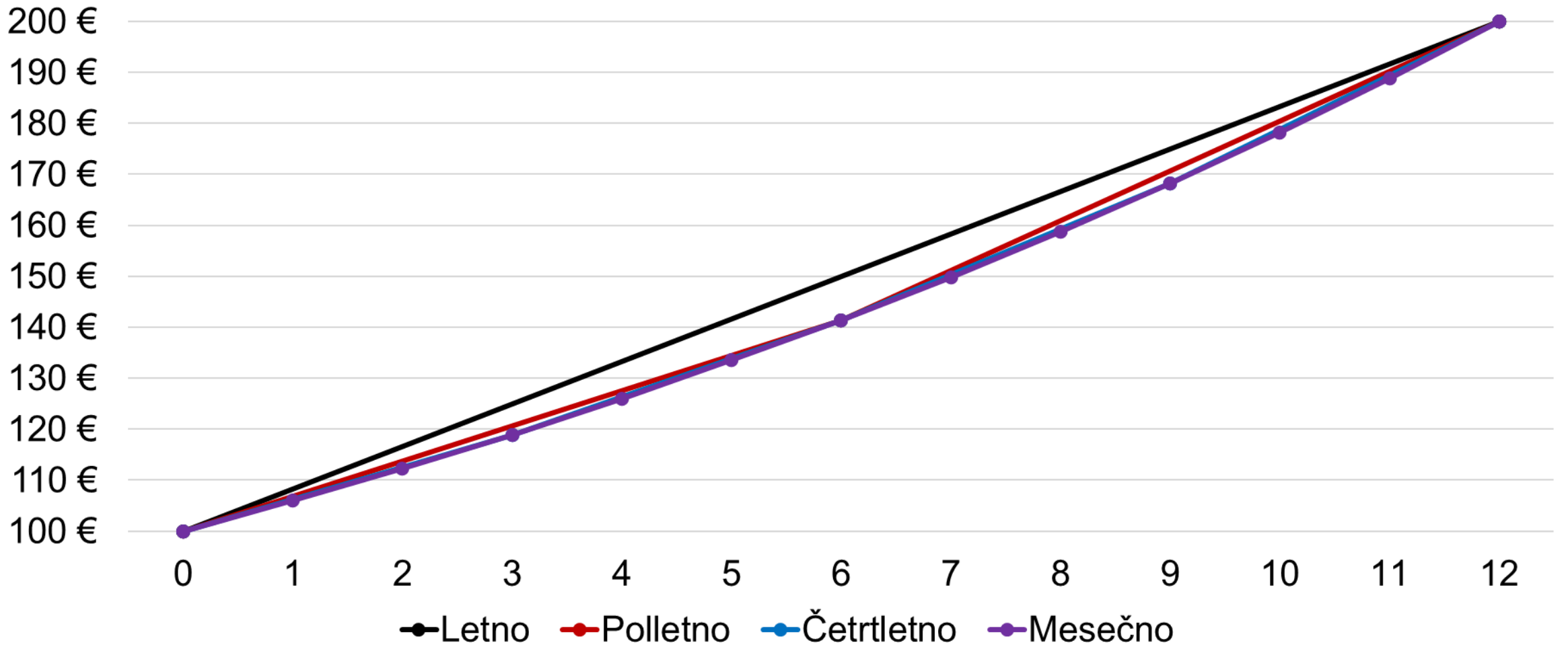
Konformno obrestovanje: $G_0 = 100\ €, \quad p\ \% = 100\ \%$

Končna glavnica po m mesecih



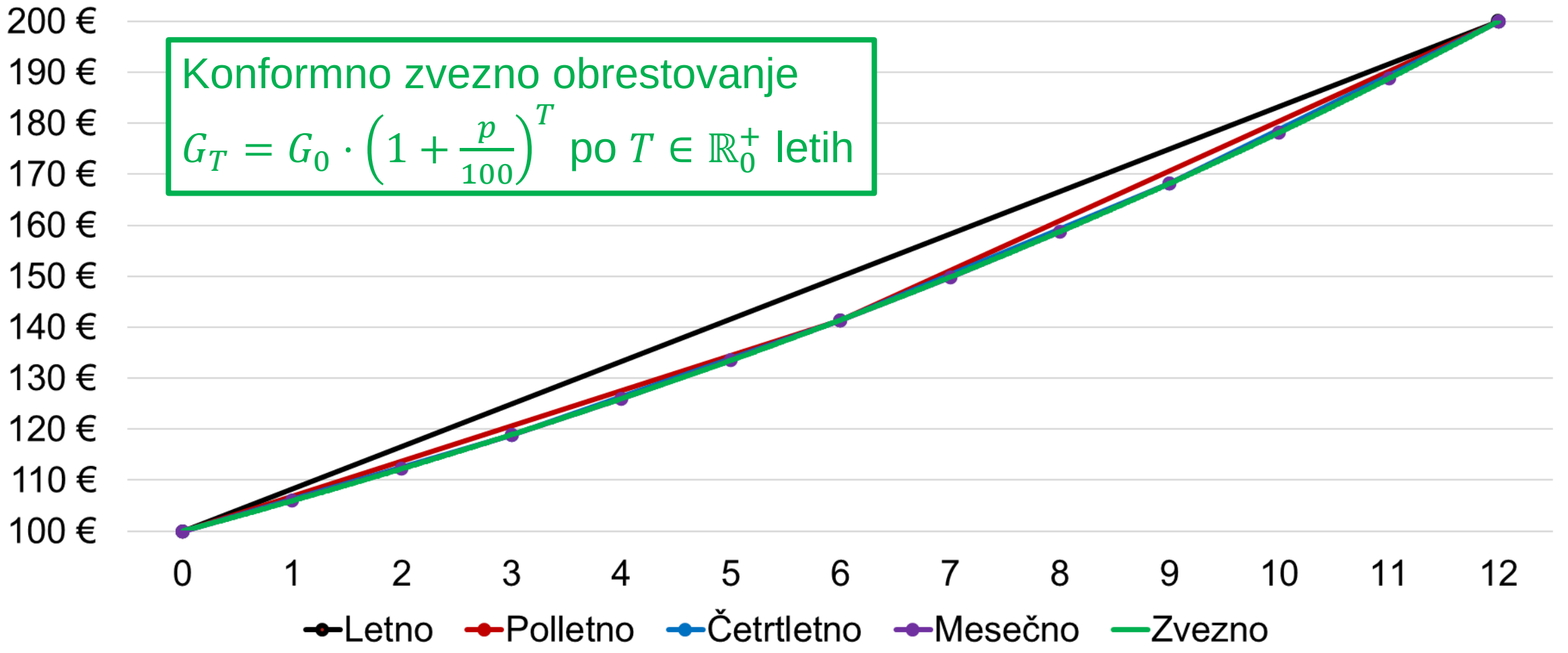
Konformno obrestovanje: $G_0 = 100\ €, \quad p\ \% = 100\ \%$

Končna glavnica po m mesecih



Konformno obrestovanje: $G_0 = 100\ €,\quad p\ \% = 100\ \%$

Končna glavnica po m mesecih



Konformno zvezno obrestovanje

$G_T = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^T$ po $T \in \mathbb{R}_0^+$ letih

Šolsko tekmovanje 2016 (nadaljevanje)

Konkurenčni banki ponujata polletne **depozite z naraščajočo obrestno mero**.

Depozit se prvi mesec obrestuje po letni obrestni meri **1,5 %**, naslednja dva meseca po letni obrestni meri **1,8 %**, zadnje tri mesece pa po letni obrestni meri **2,4 %**. Privzemi, da na vsaki od bank vežemo po **1000 €**.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti, v odstotkih pa na pet decimalnih mest.

c) Banka B uporablja **konformno mesečno obrestovanje**. Kolikšen znesek imamo ob koncu depozita?

Rešitev naloge c)

$G_0 = 1000\ €$

$p_1\ \% = 1{,}5\ \%$

$m_1 = 1$ mesec

$p_2\ \% = 1{,}8\ \%$

$m_2 = 2$ meseca

$p_3\ \% = 2{,}4\ \%$

$m_3 = 3$ mesece

$G_6 = ?$

Šolsko tekmovanje 2016 (nadaljevanje)

Konkurenčni banki ponujata polletne **depozite z naraščajočo obrestno mero**.

Depozit se prvi mesec obrestuje po letni obrestni meri **1,5 %**, naslednja dva meseca po letni obrestni meri **1,8 %**, zadnje tri mesece pa po letni obrestni meri **2,4 %**. Privzemi, da na vsaki od bank vežemo po **1000 €**.

Rezultate v evrih zaokroži na dve decimalni mesti, v odstotkih pa na pet decimalnih mest.

c) Banka B uporablja **konformno mesečno obrestovanje**. Kolikšen znesek imamo ob koncu depozita?

d) Kolikšna bi morala biti **nespremenljiva** letna **obrestna mera** s konformnim mesečnim obrestovanjem pri banki B, da bi pri vezavi za pol leta dobili enak končni znesek kot v c)?

Se nadaljuje …

Rešitev naloge d)

$G_0 = 1000\ €$

$p_1\ \% = 1{,}5\ \%$

$m_1 = 1$ mesec

$p_2\ \% = 1{,}8\ \%$

$m_2 = 2$ meseca

$p_3\ \% = 2{,}4\ \%$

$m_3 = 3$ mesece

$G_6 = 1010{,}19\ €$

Mednarodne oznake in terminologija

Obrestni in diskontni faktor

Nominalna obrestna mera

Efektivna obrestna mera

Obrestna mera in časovna premica (daljica)

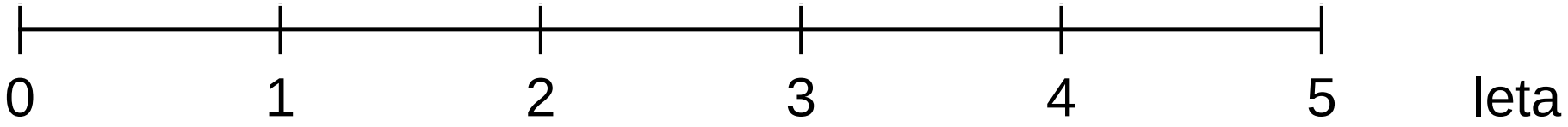
- Letna obrestna mera $p\,\% = 10\,\%$ → Letna obrestna mera $R = 10\,\% = 0{,}1$
- Na časovni premici označujemo **leta**

V enačbah odpadejo stotine

- Krediti in varčevanja



- Finančni instrumenti ($t = 0$ običajno pomeni danes)



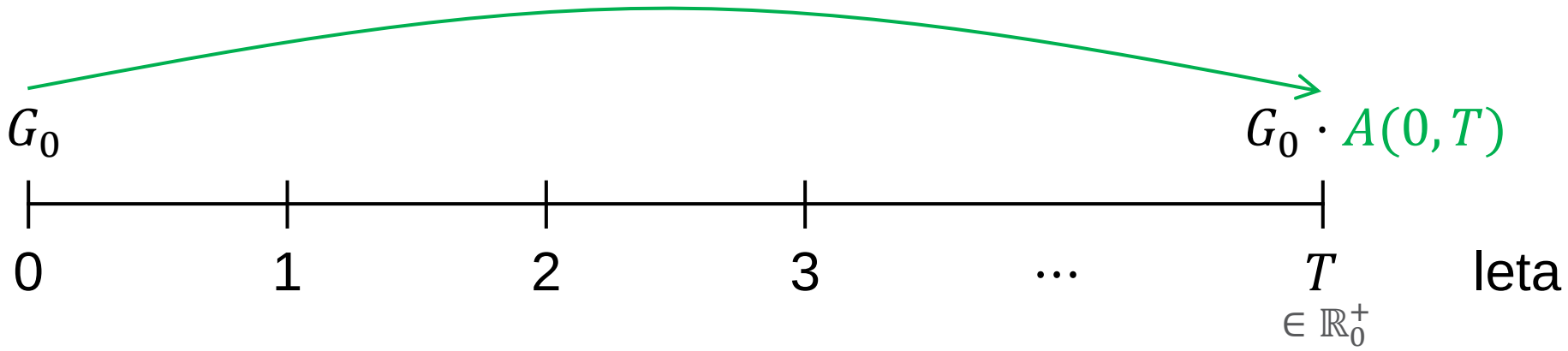
- Obrestna mera je odvisna od dospetja: $R(0,T)$ → **časovna struktura obr. mere**

Obrestni in diskontni faktor

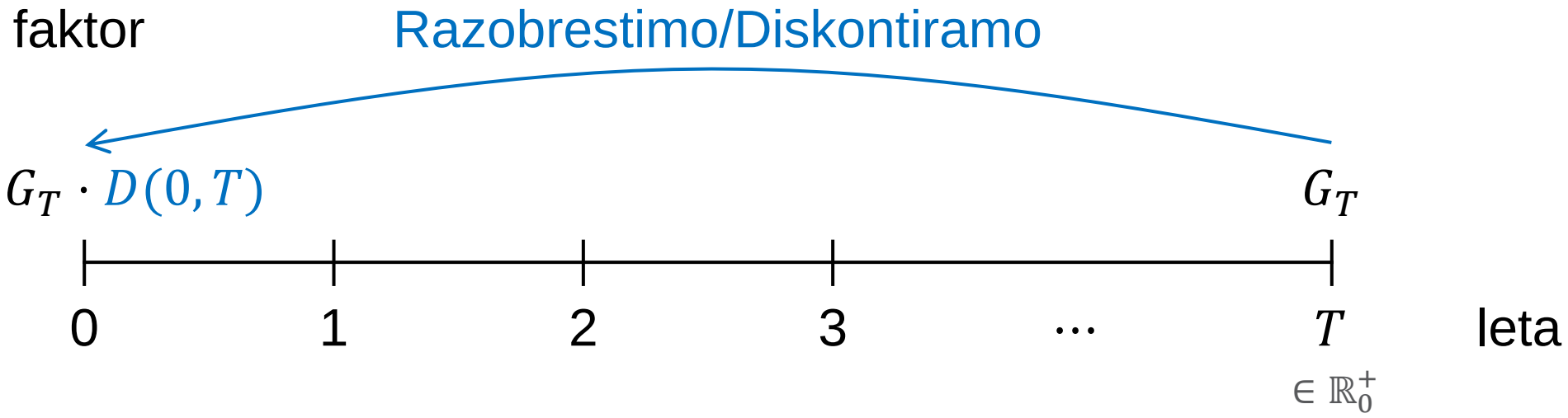
- Letna obr. mera $R(0,T)$
- Način obrestovanja

$$A(0,T) \cdot D(0,T) = 1$$

- Obrestni faktor



- Diskontni faktor



Navadno obrestovanje

- Letna obrestna mera $p\ \%$ $\rightarrow$ (Navadna) **letna** obrestna mera $R(0,T)$

$$G_T = G_0 + o = G_0 + G_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n = G_0 + G_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{m}{12} = G_0 + G_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{365}$$

- Čas merimo v **letih** $T \in \mathbb{R}_0^+$

$$G_T = G_0 + o = G_0 + G_0 \cdot R(0,T) \cdot T = G_0 \cdot (1 + R(0,T) \cdot T)$$

- Obrestni faktor $\boxed{A(0,T) = 1 + R(0,T) \cdot T}$ in diskontni faktor $\boxed{D(0,T) = \frac{1}{1+R(0,T)\cdot T}}$

Letno obrestno obrestovanje

- Letna obrestna mera $p\ \%$ $\rightarrow$ **Letna** obrestna mera $R(0,T)$
- Število let $n \in \mathbb{N}_0$, letni obrestni faktor $r = 1 + \frac{p}{100}$

$$G_n = G_0 \cdot r^n = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

- Čas merimo v **letih** $T \in \mathbb{N}_0$

$$G_T = G_0 \cdot \left(1 + R(0,T)\right)^T$$

- Obrestni faktor $\boxed{A(0,T) = \left(1 + R(0,T)\right)^T}$ in diskontni faktor $\boxed{D(0,T) = \frac{1}{\left(1+R(0,T)\right)^T}}$

Zvezno obrestno obrestovanje

Čas merimo v letih $T \in \mathbb{R}_0^+$

Relativni način $\rightarrow$ **Nominalna letna** obrestna mera $R(0,T)$

- $G_T = G_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot T} \quad \rightarrow \quad G_T = G_0 \cdot e^{R(0,T) \cdot T}$
- Obrestni faktor $\boxed{A(0,T) = e^{R(0,T) \cdot T}}$ in diskontni faktor $\boxed{D(0,T) = e^{-R(0,T) \cdot T}}$

Konformni način $\rightarrow$ **Efektivna letna** obrestna mera $R(0,T)$

- $G_T = G_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^T \quad \rightarrow \quad G_T = G_0 \cdot \left(1 + R(0,T)\right)^T$

Enaka oblika kot pri letnem obrestovanju

- Obrestni faktor $\boxed{A(0,T) = \left(1 + R(0,T)\right)^T}$ in diskontni faktor $\boxed{D(0,T) = \frac{1}{\left(1+R(0,T)\right)^T}}$

Obveznice

Brezkuponske obveznice

Kuponske obveznice

Dolžniški vrednostni papirji

Poslovna banka kot posrednik za fizične osebe in mala podjetja:

- Komitenti s presežkom denarja → **depoziti (vloge)**
- Komitenti s primanjkljajem denarja → **krediti (posojila)**

Države in velika podjetja si izposojajo zelo velike zneske.

- Veliko posojilo razbije na več manjših posojil pri različnih posojilodajalcih.
- 1 milijarda € → izda 1 milijon **obveznic** po 1000 €.
- Proda obveznice na **avkciji** (dražbi).

Vlagatelj (kupec obveznice) posodi denar **izdajatelju**, obveznica je dokument, ki mu zagotavlja vračilo posojenega zneska (dolžniški vrednostni papir).

Kuponske in brezkuponske obveznice

Brezkuponska obveznica

- Dolg se povrne v enkratnem znesku ob dospetju obveznice

Kuponska obveznica

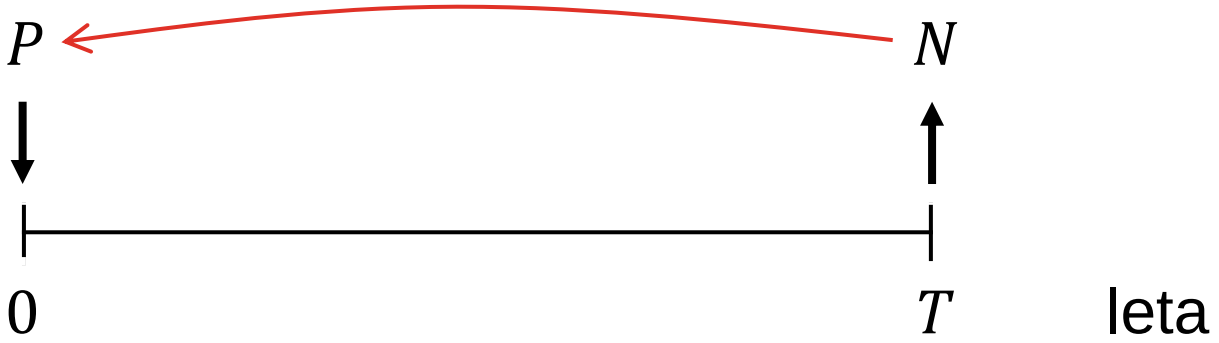
- Vključuje periodično plačilo obresti v obliki kuponov pred in ob dospetju obveznice

Trgovanje z obveznicami na **kapitalskih trgih**

- **Primarni trg** je avkcija, na kateri obveznice kupijo prvi lastniki.
- Kasneje se z obveznicami trguje na **sekundarnem trgu** (borze, neborzni trgi).

Brezkuponske obveznice

- Za nakup obveznice ob izdaji ($t = 0$) na avkciji plačamo **ceno** P
- Izdajatelj nam ob **dospetju** obveznice T izplača **nominalno vrednost** N



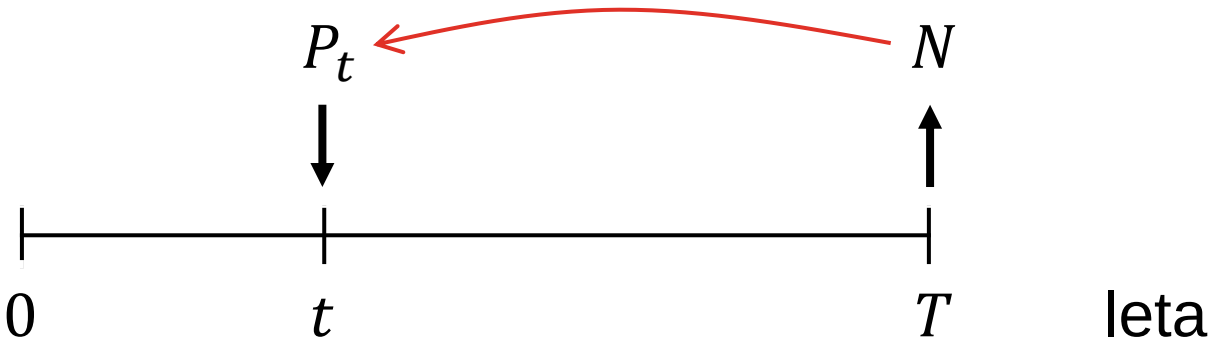
Ceno obveznice določimo **z diskontiranjem** njenega prihodnjega denarnega toka.

$$P = N \cdot D(0, T)$$

- $P < N$: Obveznica se prodaja **z diskontom** $N - P$
- $P > N$: Obveznica se prodaja **s premijo** $P - N$

Brezkuponske obveznice

- Za nakup obveznice v času $0 < t < T$ na sekundarnem trgu plačamo **ceno** P_t



Ceno obveznice določimo **z diskontiranjem** njenega prihodnjega denarnega toka.

$$P_t = N \cdot D(t, T)$$

- Cena P iz avkcije na ceno v času $t > 0$ **nima vpliva**.

Brezkuponske obveznice
Tip obrestovanja

Kratkoročne obveznice (**zakladne menice**): ob izdaje do dospetja do ≈ 1 leto

- Običajno uporabljamo **navadno** obrestovanje

$$P = N \cdot D(0,T) = \frac{N}{1 + R(0,T) \cdot T}$$

Dolgoročne obveznice (redke)

- Običajno uporabljamo **zvezno** obrestovanje z **efektivno** obrestno mero

$$P = N \cdot D(0,T) = \frac{N}{\left(1 + R(0,T)\right)^{T}}$$

Šolsko tekmovanje 2022

Državna zakladnica je izdala **šestmesečne**, **dvanajstmesečne** in **osemnajstmesečne** zakladne menice. To so netvegane brezkuponske obveznice z nominalnimi vrednostmi **1000 €**. V sporočilu za javnost so zapisali, da je cena šestmesečne menice znašala **978 €**, dvanajstmesečne **939 €**, osemnajstmesečne pa **892,90 €**.

a) Pri vrednotenju zakladnih menic uporabljamo **navadno obrestovanje**. Določi obrestne mere $R(0,\frac{1}{2})$, $R(0,1)$ in $R(0,\frac{3}{2})$, po katerih se je zadolžila država.

Rešitev naloge a)

$N = 1000\ €$

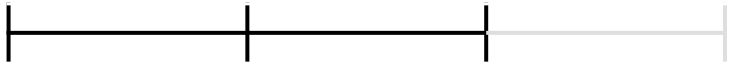
$T_A = \frac{1}{2}$ leta

$P_A = 978\ €$



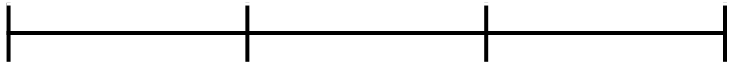
$T_B = 1$ leto

$P_B = 939\ €$



$T_C = \frac{3}{2}$ leta

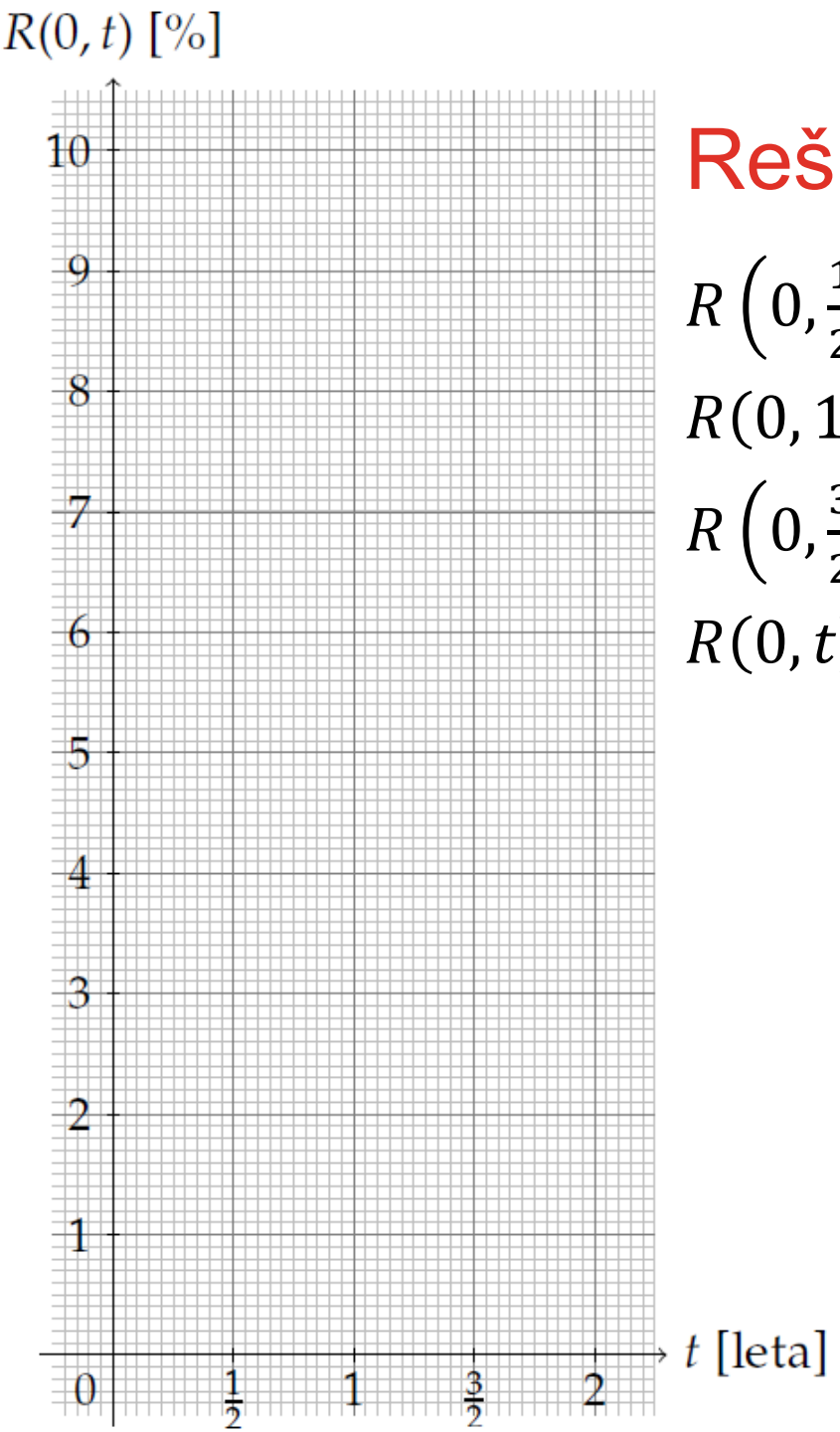
$P_C = 892{,}90\ €$



Šolsko tekmovanje 2022

b) Privzemi, da je **časovna struktura** obrestne mere $R(0,t)$ zvezna in odsekoma linearna z delilnimi točkami pri $t = \frac{1}{2}$, $t = 1$ in $t = \frac{3}{2}$. Nariši graf časovne strukture obrestne mere $R(0,t)$ v odstotkih za obdobje $\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$ ter določi njen analitični predpis.

Nasvet: Analitični predpis sestavljata linearni funkciji $R_i(0,t) = k_i t + n_i$, kjer indeks $i = 1$ ustreza obdobju $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$, indeks $i = 2$ pa obdobju $1 \leq t \leq \frac{3}{2}$.



Rešitev naloge b)

$R\left(0, \frac{1}{2}\right) = 4{,}50\ \%$

$R(0, 1) = 6{,}50\ \%$

$R\left(0, \frac{3}{2}\right) = 8{,}00\ \%$

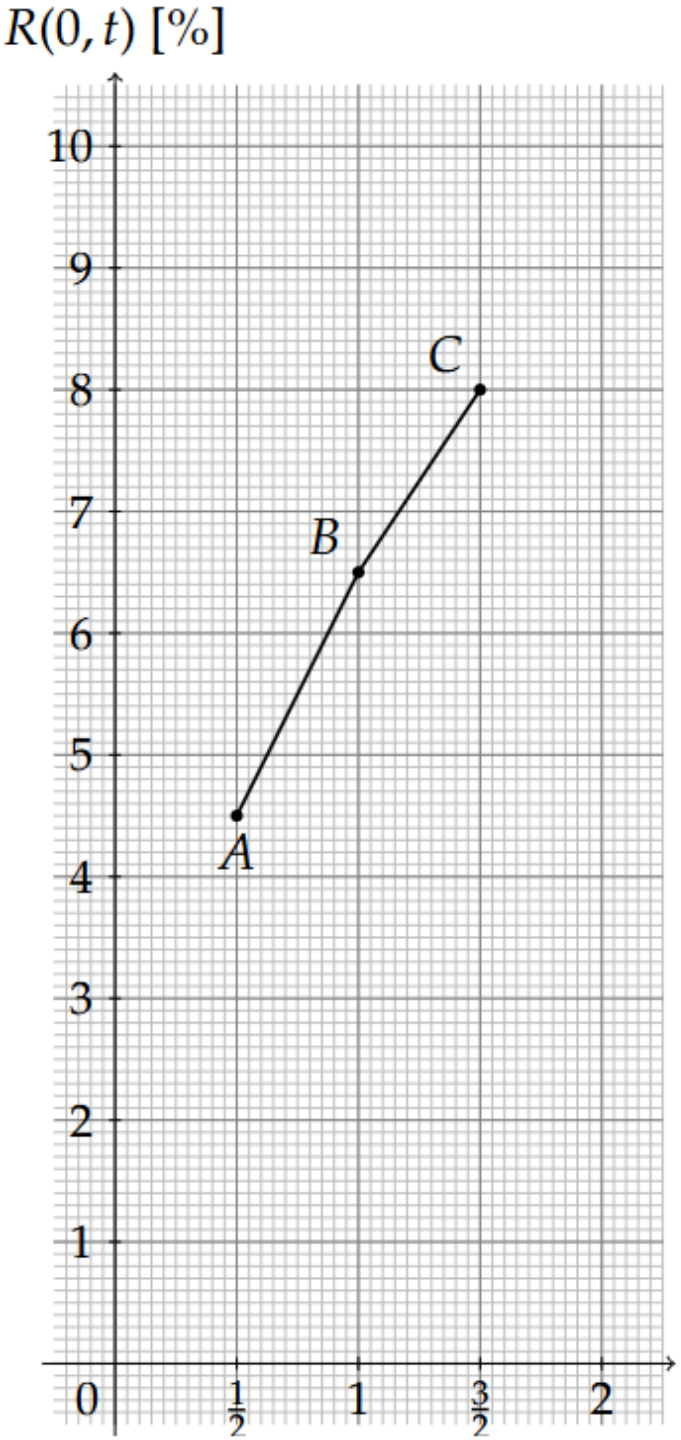
$R(0, t) = ?$

Šolsko tekmovanje 2022

c) Časovno strukturo želimo podaljšati do časa $t = 2$ s pomočjo še tretje linearne funkcije $R_3(0,t) = k_3 t + n_3$. Privzemi, da smerni koeficienti k_1, k_2, k_3 sestavljajo **aritmetično zaporedje** in da je časovna struktura zvezna. Določi obrestno mero $R(0,2)$ in dopolni graf iz naloge b).

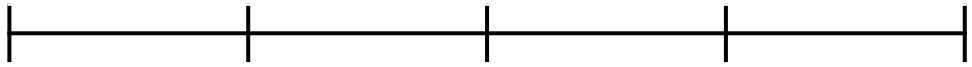
d) Zaradi interesa vlagateljev država izda še milijon **dveletnih** zakladnih menic z nominalno vrednostjo **1000 €**. Določi ceno dveletne menice in znesek, ki ga z dodatno izdajo zbere država.

Rešitev nalog c) in d)



$k_1 = 4$

$k_2 = 3$



Nova izdaja:

$n = 10^6$

$T = 2$ leti

$N = 1000$ €

$P_D = ?$

Kuponske obveznice

- Za nakup obveznice ob izdaji ($t = 0$) na avkciji plačamo **ceno** P
- Izdajatelj nam periodično (**kuponski datumi**) izplačuje vnaprej znane **kupone** C_i
- Ob **dospetju** T nam izplača zadnji kupon in **nominalno vrednost** N



Ceno obveznice določimo **z diskontiranjem** njenih prihodnjih denarnih tokov.

$$P = C_1 \cdot D(0, t_1) + C_2 \cdot D(0, t_2) + \cdots + C_{n-1} \cdot D(0, t_{n-1}) + (N + C_n) \cdot D(0, T)$$

Kuponske obveznice
Kuponi in tip obrestovanja

- Kuponi so lahko letni ($\Delta = 1$ leto), polletni ($\Delta = \frac{1}{2}$ leta) ali četrtletni ($\Delta = \frac{1}{4}$ leta)
- Prvi kupon je izplačan v času $t_1 = \Delta$, zadnji (n-ti) ob dospetju $t_n = T = n \cdot \Delta$
- Običajno so vsi kuponi enaki ($C_i = C$) in določeni s **kuponsko obrestno mero** c

$$C = N \cdot \Delta \cdot c$$

- Običajno uporabljamo **zvezno** obrestovanje z **efektivno** obrestno mero

$$P = \frac{C}{\left(1 + R(0,t_1)\right)^{t_1}} + \frac{C}{\left(1 + R(0,t_2)\right)^{t_2}} + \cdots + \frac{C}{\left(1 + R(0,t_{n-1})\right)^{t_{n-1}}} + \frac{N + C}{\left(1 + R(0,T)\right)^{T}}$$

Na ceno P_t $(0 < t < T)$ na sekundarnem trgu **že izplačani kuponi ne vplivajo**

Viri in literatura

Arhiv tekmovalnih nalog iz finančne matematike in statistike

- https://www.dmfa.si/Tekmovanja/PMSS/ArhivNalog.aspx (2014–2021)
- https://www.dmfa.si/Tekmovanja/EkSS/ArhivNalog.aspx (od 2022 dalje)

Literatura iz finančne matematike

- T. Košir, K. Pugelj, A. Toman, *Dodatno gradivo za pripravo na tekmovanje v znanju finančne matematike in statistike*, DMFA, 2016, dostopno na http://www.dmfa.si/Tekmovanja/Gradiva/FMS_gradivo_2016.pdf
- A. Toman, *Rešene naloge iz finančne matematike 1: Finančni instrumenti*, DMFA – založništvo, 2016

Hvala za pozornost

Dr. Aleš Toman

UL EF in DMFA Slovenije

ales.toman@ef.uni-lj.si